Amérique du Nord juin 2002

On pourra utiliser sans justification que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = \ln(e^x + k\,x) - x$.

Soit C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1 + a) \le a$.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)$.

   En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : Étude et propriétés des fonctions f_k.

1. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1+k\,\dfrac{x}{e^x}\right)$

   En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.

3. *a*. Dresser le tableau de variation de f_k.

b. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $f_k(x) \le \dfrac{k}{e}$.

4. Déterminer une équation de la tangente T_k à C_k au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de C_p et C_m.
6. Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

CORRECTION

Étude préliminaire

1. g est définie dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$

pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $g'(x) \le 0$ donc g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. $g(0) = 0$ et g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ donc tout réel a positif ou nul, $g(a) \le g(0)$ soit $g(a) \le 0$ donc $\ln(1 + a) \le a$.

Partie A

1. $f_1'(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x + x} - 1 = \dfrac{1 - x}{e^x + x}$

Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x > 0$ et $x \ge 0$ donc $e^x + x > 0$ donc $f_1'(x)$ a le même signe que $1 - x$

Sur $[0 ; 1]$, $f_1'(x) \ge 0$ donc f_1 est croissante

Sur $[1 ; +\infty[$, $f_1'(x) \le 0$ donc f_1 est décroissante

2. $\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x + x}{e^x}\right) = \ln(e^x + x) - \ln(e^x) = \ln(e^x + x) - x = f_1(x)$

$f_1(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right) = \ln(1 + x\,e^{-x})$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \ln 1 = 0$

3.

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	0	↗	$\ln(1 + e^{-1})$	↘	0

Partie B

1. $f_k'(x) = \dfrac{e^x + k}{e^x + k\,x} - 1 = \dfrac{k\,(1 - x)}{e^x + x}$ or pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x > 0$ et $x \ge 0$ donc $e^x + x > 0$

donc $f_k'(x)$ a le même signe que $k\,(1 - x)$

or k est un réel strictement positif, donc $f_k'(x)$ a le même signe que $(1 – x)$
Sur $[0 ; 1]$, $f_k'(x) \geq 0$ donc f_k est croissante
Sur $[1 ; + \infty [$, $f_k'(x) \leq 0$ donc f_k est décroissante

2. $\ln\left(1+k\dfrac{x}{e^x}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x+k\,x}{e^x}\right)$
$= \ln(e^x + k\,x) – \ln(e^x) = \ln(e^x + k\,x) - x = f_k(x)$
$f_k(x) = \ln\left(1+k\dfrac{x}{e^x}\right) = \ln(1 + k\,x\,e^{-x})$
or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \ln 1 = 0$

3. *a*.

x	0		1		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$–$	
f_k	0	$\nearrow$	$\ln(1 + k\,e^{-1})$	$\searrow$	0

b. Sur $[0 ; 1]$, $f_k'(x) \geq 0$ donc f_k est croissante
Sur $[1 ; + \infty [$, $f_k'(x) \leq 0$ donc f_k est décroissante donc f_k admet un maximum en 1 et pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f_k(x) \leq f_k(1)$
soit $f_k(x) \leq \ln(1 + k\,e^{-1})$
Pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1 + a) \leq a$
donc en particulier pour $a = k\,e^{-1}$ on a : $\ln(1 + k\,e^{-1}) \leq k\,e^{-1}$
donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f_k(x) \leq k\,e^{-1}$ soit $f_k(x) \leq \dfrac{k}{e}$.

4. T_k est la droite de coefficient directeur $f_k'(0)$ ($f_k'(0) = k$) passant par O donc une équation de la tangente T_k à C_k au point O est $y = k\,x$

5. $f_m(x) – f_p(x) = \ln(e^x + m\,x) - x – [\ln(e^x + p\,x) - x]$
$= \ln(e^x + m\,x) – \ln(e^x + p\,x)$
$p < m$ et $x \geq 0$ donc $(e^x + m\,x) \geq (e^x + p\,x)$
La fonction ln étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a :
$\ln(e^x + m\,x) \geq \ln(e^x + p\,x)$ donc $f_m(x) – f_p(x) \geq 0$
donc C_p est en dessous de C_m sur $[0 ; +\infty[$.
6.