Exercice 1 (4 points) commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième. Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont premier prix, et les autres sont haut de gamme. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas haut de gamme, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas haut de gamine, et en trouve 19 qui sont défectueux.

Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?

On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas premier prix. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas premier prix, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas premier prix vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leq X \leq 775)$.

2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas premier prix qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. On ne réalimente pas le stock en cours de mois.

Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin:

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont premier prix, les autres haut de gamme
- 3 % des cadenas haut de gamme sont défectueux;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

p la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux ;

H I 'événement : « le cadenas prélevé est haut de gamme »

D l'événement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p. Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question a-2..?

3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme.

Exercice 2 (4 points) commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

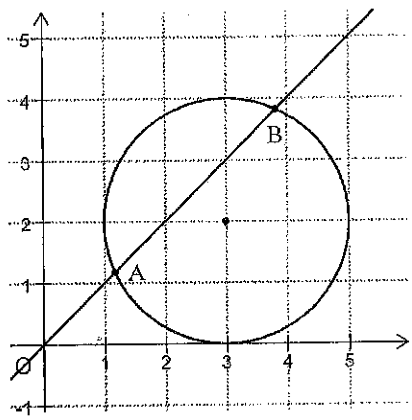
1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \text{ et } |z-3-2\,\mathrm{i}| \leq 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées (3 ; 2) et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.

Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.

Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].



2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel.

Pour les questions 3 et 4, on considère les points E (2 ; 1; – 3), F (1 ; – 1 ; 2) et G (– 1 ; 3 ; 1) *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de* l'*espace.*

3. Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 7-10t \end{cases}$$

4. Affirmation 4: une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.

Exercice 3 (7 points) commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et, pour tout n de N, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^{x} - x$.

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g(x) = (e^{x} - 1)(2e^{x} + 1)$.

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 0$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0{,}02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > \text{M}$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	*n*. est un entier, *u* et M sont deux réels
Initialisation	*u* prend la valeur 0,02 *n* prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ……………… .... Fin tant que
Sortie	Afficher *n*

a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si M = 60.

Exercice 4 (5 points) candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

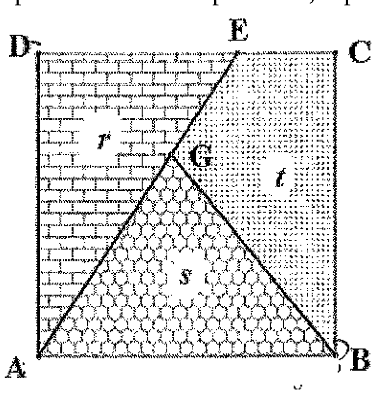
Les parties A et B sont indépendantes.

Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.

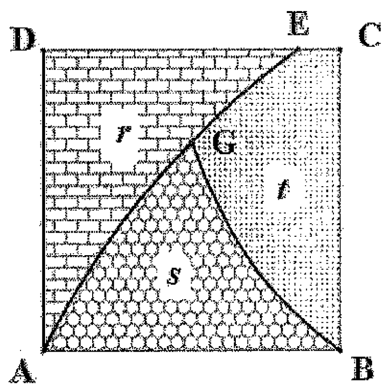
Ce logo *a* la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C_1 et C_2 suivantes.

- Condition C_1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes:
  - une des lignes est le segment [AD]
  - une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC]
  - la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne
- Condition C_2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées *r*, *s*, *t* sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous.



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Partie A: étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.

Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B: étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes:

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geq 0$ par :
$$f(x) = \ln(2x + 1);$$
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par:
$$g(x) = k\left(\frac{1-x}{x}\right) \text{ où } k \text{ est un réel positif qui sera déterminé.}$$

1. *a.* Déterminer l'abscisse du point E.

b. Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.

2\. ***a.*** Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geq 0$ par :
$$F(x) = (x + 0{,}5)\ \ln(2x + 1) - x.$$

b. Démontrer que $r = \frac{e}{2} - 1$.

3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]\,0 ; +\infty\,[$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = (\ln 2)^2 + \dfrac{\ln(2) - 1}{2}$

La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?'

Exercice 4 (5 points) candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé «TP ». Ainsi (3, 4, 5) est unTP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A: généralités

1. Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(p\,x, p\,y, p\,z)$ est lui aussi un TP.

2. Démontrer que, si (x, y, z) est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair : $n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.

L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée décomposition de n.

Voici par exemple les décompositions des entiers 9 et 120 : $9 = 2^\circ \times 9$, $120 = 2^3 \times 15$.

a. Donner la décomposition de l'entier 192.

b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.

Écrire la décomposition des entiers naturels $2x^2$ et z^2.

c. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition de $2x^2$ et dans celle de z^2 montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question a-3. permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP (x, y, Z), les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :
$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$.

Déterminer un TP de la forme $(2015, y, z)$.

3. *a.* En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$ avec $x < 403$.

b. En déduire un TP de la forme $(x, 2015, z)$.

CORRECTION

Exercice 1 (4 points) commun à tous les candidats

Partie A

1. $n = 500$ donc $n \geq 30$, $n\,p = 500 \times 0{,}03 = 15$ donc $n\,p \geq 5$, $n\,(1 - p) = 500 \times 0{,}97$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$

Les conditions sont vérifiées pour appliquer la formule donnant un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de cadenas défectueux.

$I_{500} = \left[\, 0{,}03 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}03 \times 0{,}97}{500}}\,;\, 0{,}03 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}03 \times 0{,}97}{500}} \,\right]$ soit approximativement [0,015 ; 0,045]

La fréquence observée est $f = \dfrac{19}{500} = 0{,}038$, $f \in I_{500}$ donc ce contrôle ne remet donc pas en cause, au risque de 5%, l'affirmation du fournisseur.

2. $n = 500$, donc $n \geq 30$

$f = \dfrac{39}{500} = 0{,}078$, $n\,f = 500 \times 0{,}078 = 39$ donc $n\,f \geq 5$, $n\,(1 - f) = 500 \times 0{,}922 = 461$ donc $n\,(1 - f) \geq 5$

Les conditions sont vérifiées pour appliquer la formule donnant un intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de cadenas défectueux.

$I'_{500} = \left[\, 0{,}078 - \dfrac{1}{\sqrt{500}}\,;\, 0{,}078 + \dfrac{1}{\sqrt{500}} \,\right]$ soit approximativement [0,033 ; 0,123].

Partie B

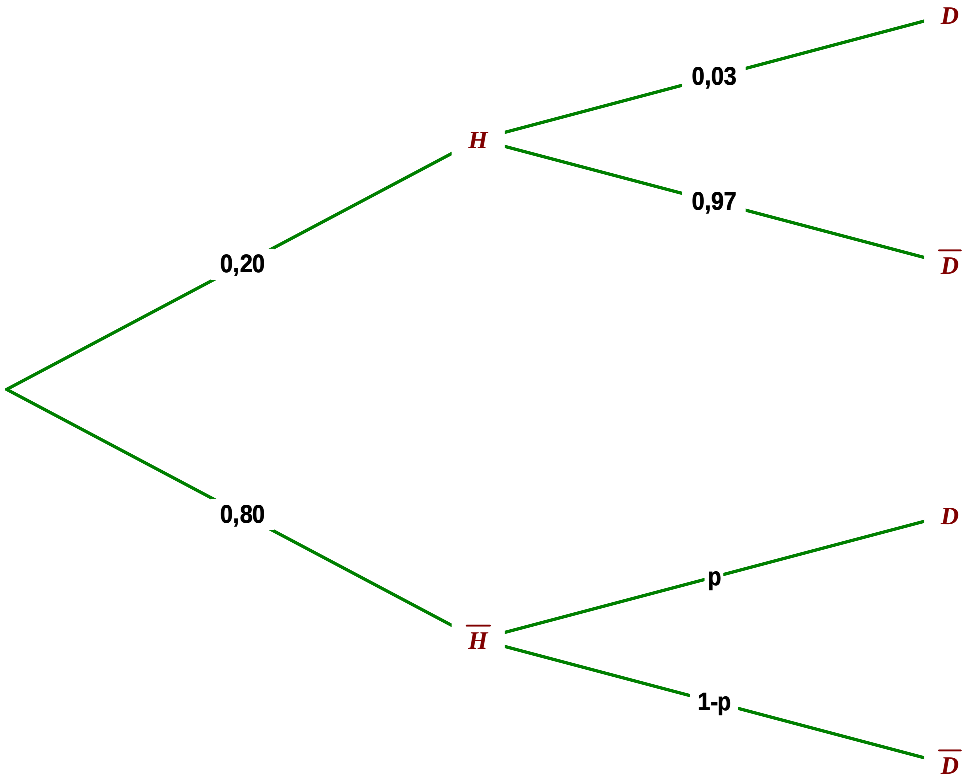
1. $P(725 \leq X \leq 775) = 0{,}683$

2. Le magasin est en rupture de stock si la demande est strictement supérieure au nombre de cadenas en stock, il faut donc déterminer n tel que $P(X > n) \leq 0{,}05$.

La loi normale inverse de la calculatrice donne $n \geq 791{,}13$. La valeur minimale est donc 792.

Partie C

1.



2. $P(D) = P(H \cap D) + p(\overline{H} \cap D) = 0{,}8\,p + 0{,}03 \times 0{,}2 = 0{,}07$.

$0{,}8\,p + 0{,}006 = 0{,}07$ donc $p = \dfrac{0{,}064}{0{,}8}$ soit $p = 0{,}08$

Un intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de cadenas défectueux est approximativement [0,033 ; 0,123].

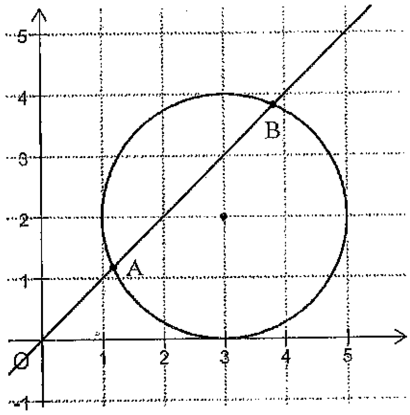
$0{,}08 \in [0{,}033 ; 0{,}123]$ donc le résultat est cohérent avec celui de la question a**. 2**.

3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme.

$P_{\overline{D}}(H) = \dfrac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$ donc $P_{\overline{D}}(H) = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}97}{1 - 0{,}07}$ soit approximativement 0,209.

Exercice 2 (4 points) commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 : Vraie



Soit Ω le point de coordonnées (3 ; 2)

$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = x^2 + y^2 - 2y \Leftrightarrow x = y$

M appartient à la droite d'équation $y = x$.

$|z-3-2\mathrm{i}| \leq 2 \Leftrightarrow |z-(3+2\mathrm{i})| \leq 2 \Leftrightarrow \Omega M \leq 2$ donc M appartient au disque de centre Ω de rayon 2

M vérifie les deux conditions donc décrit l'intersection de la droite d'équation $y = x$ et du disque soit le segment [AB].

2. Affirmation 2 : Fausse

$\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515} = \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{2015}$ donc $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515} = 2^{2015}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2015\frac{\pi}{6}}$

$\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515} = 2^{2015}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(252\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 2^{2015}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2^{2015}\,\mathrm{i}$

3. Affirmation 3 : Vraie

Soit **D** la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 7 - 10t \end{cases}$.

Le point de la droite d'abscisse 2 correspond à $t = 1$, il *a* alors pour coordonnées (2 ; 1; – 3), donc le point E appartient à la droite D

Le point de la droite d'abscisse 1 correspond à $t = \frac{1}{2}$, il *a* alors pour coordonnées (1 ;– 1; 2), donc le point F appartient à la droite D

La droite **D** est la droite (EF)

4. Affirmation 4: Vraie

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \mathrm{EF} \times \mathrm{EG}\cos\widehat{\mathrm{FEG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\,(-1\,;-2\,;5)$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\ (-3\,;2\,;4)$ donc $\mathrm{EF}^2 = 1 + 4 + 25 = 29$ et $\mathrm{EG}^2 = 9 + 4 + 16 = 29$ donc

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{EG}} = 29\cos\widehat{\mathrm{FEG}}$ d'autre part $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{EG}} = 3 - 4 + 20 = 19$ donc $\cos\widehat{\mathrm{FEG}} = \frac{19}{29}$ $\widehat{\mathrm{FEG}} \approx 49{,}90°$donc au degré près $\widehat{\mathrm{FEG}} \approx 50°$.

Exercice 3 (7 points) commun à tous les candidats

1. *a.* $g'(x) = 2\,e^{2x} - e^{x} - 1$

Pour tout réel x : $g(x) = (e^{x} - 1)(2\,e^{x} + 1) = 2\,e^{2x} + e^{x} - 2\,e^{x} - 1 = 2\,e^{2x} - e^{x} - 1 = g'(x)$.

b. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $2\,e^{x} + 1 > 0$ (somme de termes strictement positifs)

$e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$ donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Elle admet un minimum pour $x = 0$ et son minimum est $g(0) = 0$.

c. $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$

La fonction g admet un minimum pour $x = 0$ et son minimum est $g(0) = 0$ donc pour tout x réel, $g(x) \geq 0$

$u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ or $g(u_n) \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est croissante

2. *a.* Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = a$ donc $u_0 \leq 0$

La propriété est vraie au rang 0

Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si la propriété vraie au rang n : $(u_n \leq 0)$ alors elle est vraie au rang $n + 1$ donc $(u_{n+1} \leq 0)$

$u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$ or la fonction exponentielle est toujours positive.

$u_n \leq 0$ donc $e^{u_n} \leq 1$ donc $e^{u_n} - 1 \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq 0$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq 0$.

b. La suite (u_n) est croissante, majorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente.

c. La suite (u_n) est croissante, majorée par 0 donc si a vaut 0, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 0$

La limite de la suite (u_n) est 0.

3. *a.* $a \geq 0$ et la fonction g est croissante sur $[0\,;+\infty[$ or pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$ donc $g(u_n) \geq g(a)$ donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

***b.* Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = a$ or $a + 0 \times g(a) = a$ donc $u_0 \geq a + 0 \times g(a)$

La propriété est vraie au rang 0

Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si la propriété vraie au rang n : $(u_n \geq a + n \times g(a))$ alors elle est vraie au rang $n + 1$ donc $(u_{n+1} \geq a + (n+1) \times g(a))$.

$u_{n+1} - u_n\, g(a)$ donc $u_{n+1} \geq u_n + g(a)$ or $u_n \geq a + n \times g(a)$ donc $u_{n+1} \geq a + n \times g(a) + g(a)$ soit $u_{n+1} \geq a + (n+1) \times g(a)$.

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$

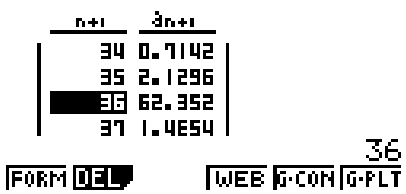
c. $a > 0$ et la fonction g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ $g(a) > g(0)$ or $g(0) = 0$ donc $g(a) > 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a + n \times g(a) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4. *a.*

Variables	n. est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que **$u < M$** **u prend la valeur $e^{2u} - e^{u}$** **n prend la valeur $n + 1$** Fin tant que
Sortie	Afficher n

b. Si $M = 60$ alors l'algorithme affiche 36.



Exercice 4 (5 points) candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

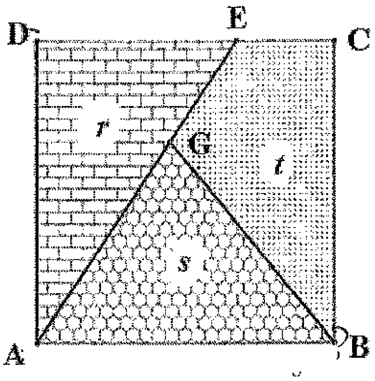
Partie A: étude de la proposition a

Soit (a ; b) les coordonnées de G, la hauteur issue de G du triangle ABG a pour mesure b donc le triangle ABG a pour aire $\frac{1}{2}b$ or $r = s = t = \frac{1}{3}$ donc $\frac{1}{2}b = \frac{1}{3}$ donc $b = \frac{2}{3}$.

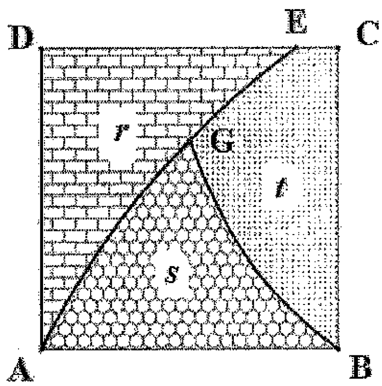
La droite (AG) a pour équation $y = m\,x$ donc $\frac{2}{3} = m\,a$ soit $m = \frac{2}{3\,a}$. La droite (AG) a pour équation $y = \frac{2}{3\,a}x$, elle coupe la droite (EC) en un point d'ordonnée 1 donc d'abscisse $x = \frac{3\,a}{2}$.

Le triangle ADE a pour aire $\frac{1}{2} \times \frac{3\,a}{2} = \frac{3\,a}{4}$ donc $\frac{3\,a}{4} = \frac{1}{3}$ soit $a = \frac{4}{9}$

G a pour coordonnées $\left(\frac{4}{9} ; \frac{2}{3}\right)$, A a pour abscisse $x = \frac{3\,a}{2} = \frac{2}{3}$ et pour ordonnée 1.



Proposition A



Proposition B

Partie B: étude de la proposition B

1. *a.* E est le point d'ordonnée 1 donc ln $(2\,x + 1) = 1$ soit $2\,x + 1 = \mathrm{e}$ donc $x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

b. Le point G appartient à la courbe représentative de la fonction f donc son ordonnée est : $y = \ln(2 \times 0{,}5 + 1) = \ln 2$

Le point G appartient à la courbe représentative de la fonction g donc son ordonnée est $g(0,5) = k\left(\frac{1-0,5}{0,5}\right) = k$ donc $k = \ln 2$.

2. ***a.*** F est le produit de fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [donc est dérivable sur [0 ; + ∞ [

$$\begin{cases} u(x) = x + 0,5 & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(2\,x+1) & v'(x) = \dfrac{2}{2\,x+1} \end{cases}$$ donc $F'(x) = \ln(2\,x + 1) + (x + 0,5)\,\frac{2}{2\,x+1} - 1$

$F(x) = \ln(2\,x + 1) + \frac{2\,(x+0,5)}{2\,x+1} - 1$ donc $F(x) = \ln(2\,x + 1) + \frac{2\,x+1}{2\,x+1} - 1$ soit $F'(x) = \ln(2\,x + 1) = f(x)$

La fonction f admet pour primitive la fonction F

b. $r = \int_0^{\frac{\mathrm{e}-1}{2}} [1 - f(x)]\,\mathrm{d}x = \left[\,x - F(x)\,\right]_0^{\frac{\mathrm{e}-1}{2}} = \left[\,2\,x - (x + 0,5)\ln(2\,x + 1)\,\right]_0^{\frac{\mathrm{e}-1}{2}}$

Si $x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$ alors $\ln(2\,x + 1) = 1$ et $x + 0,5 = \frac{\mathrm{e}}{2}$ donc $r = \mathrm{e} - 1 - \frac{\mathrm{e}}{2}$ soit $r = \frac{\mathrm{e}}{2} - 1$.

3. $g(x) = \ln 2\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ donc une primitive de g sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [, est G définie par $G(x) = \ln 2 \times (\ln x - x)$

4. $r \approx 0,359$ et $s \approx 0,327$ or $t = 1 - r - s$ donc $t \approx 0,314$. La proposition B vérifie donc les conditions imposées par le fabriquant.

Exercice 4 (5 points) candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A: généralités

1. Si (x, y, z) est un TP, alors $x^2 + y^2 = z^2$.
Soit p un entier naturel non nul, alors $p^2 (x^2 + y^2) = p^2 z^2$ soit $(p x)^2 + (p y)^2 = (p z)^2$ donc le triplet $(p x, p y, p z)$ est lui aussi un TP.

2. Si n est un nombre impair alors $n \equiv 1$ [2] donc $n^2 \equiv 1$ [2] donc n^2 est impair
Si (x, y, z) est un TP, si les entiers naturels x, y et z sont tous les trois impairs alors x^2, y^2 et z^2 sont impairs
$x^2 + y^2$ est pair (somme de termes impairs) or $x^2 + y^2 = z^2$ et z^2 est impair, un nombre ne peut pas être simultanément pair et impair donc les entiers naturels x, y et z ne sont pas tous les trois impairs

3. *a.* $192 = 8 \times 24 = 8 \times 8 \times 3 = 2^6 \times 3$

b. $x^2 = 2^{2\alpha} \times k^2$ donc $2 x^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$ et $z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$

c. Si $2 x^2 = z^2$ alors $2^{2\alpha+1} \times k^2 = 2^{2\beta} \times m^2$
La décomposition est unique donc $2\alpha + 1 = 2\beta$ et $k^2 = m^2$ or $2\alpha + 1$ est un nombre impair et 2β un nombre pair, un nombre ne peut pas être simultanément pair et impair donc il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $2 x^2 = z^2$.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.
$2015 = 5 \times 403$ or $403 = 13 \times 31$ donc une décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier est $5 \times 13 \times 31$

2. $2015 = 2 \times 1007 + 1$ donc d'après la remarque $(2 \times 1007 + 1)^2 + (2 \times 1007^2 + 2 \times 1007)^2 = (2 \times 1007^2 + 2 \times 1007 + 1)^2$.
Ainsi le triplet $(2015, 2 \times 1007^2 + 2 \times 1007, 2 \times 1007 + 2 \times 1007 + 1)$ est un TP soit (2015 , 2 030 112 , 2 030 113).

3. ***a.*** $z^2 - x^2 = (z - x)(z + x) = 403^2 = 169 \times 961$, il suffit donc de chercher s'il existe x et z entiers tels que $\begin{cases} z - x = 169 \\ z + x = 961 \end{cases}$
donc $2z = 169 + 961$ et $2x = 961 - 169$ soit $z = 565$ et $x = 396$

b. $2015 = 5 \times 403$ donc pour trouver un TP de la forme $(x, 2015, z)$ il suffit de résoudre $z^2 - x^2 = 5^2 \times 403^2$
donc $z = 5 \times 565$ et $x = 5 \times 396$ est solution donc (1980, 2015, 2825) est un TP