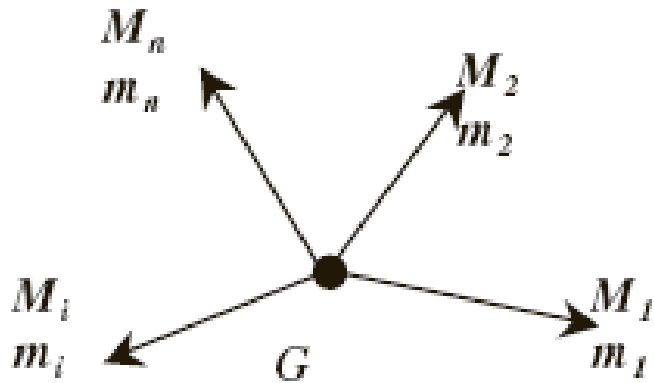


## 2. Dynamique élémentaire du point et des systèmes

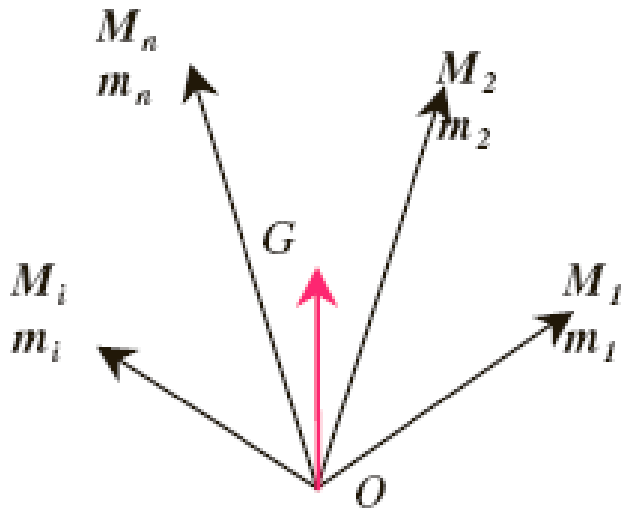
# Centre d'inertie

## Barycentre, centre de gravitation

Défini pour un système de points matériels par



$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = 0$$



$$\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} \sum_i m_i = M \cdot \overrightarrow{OG}$$

$M$  masse totale du système

# Quantité de mouvement

Le *vecteur* quantité de mouvement d'un point matériel de *masse*  $m$  se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v}$  *dans un référentiel* donné est défini par

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

unité SI : est le  $\text{kg.m.s}^{-1}$

Pour un système de points :

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} = M\vec{V}_G$$

# Principe d'inertie : 1<sup>ère</sup> loi de Newton

*Le centre d'inertie d'un système mécaniquement isolé (aucune action extérieure) est soit au repos soit en mouvement rectiligne et uniforme*

Les repères dans lesquels ce principe est vérifié sont des *repères galiléens*

Un repère lié à la terre peut être considéré comme galiléen pour les mouvements se produisant sur la terre

Dans une voiture qui roule à vitesse constante, le principe d'inertie est vérifié, mais en phase de freinage ou d'accélération, le principe n'est pas vérifié (force d'inertie)

*Tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen*

# Principe fondamental de la dynamique

## 2<sup>ème</sup> loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un système est égal à la dérivée de sa quantité de mouvement

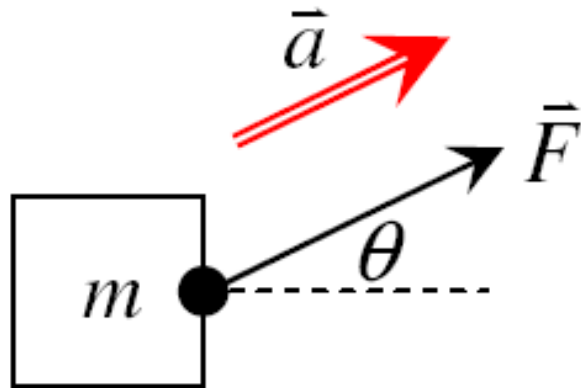
$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{V}_G)}{dt}$$

Si la masse du système est constante, la loi devient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \frac{d\vec{V}_G}{dt} = m\vec{a}_G$$

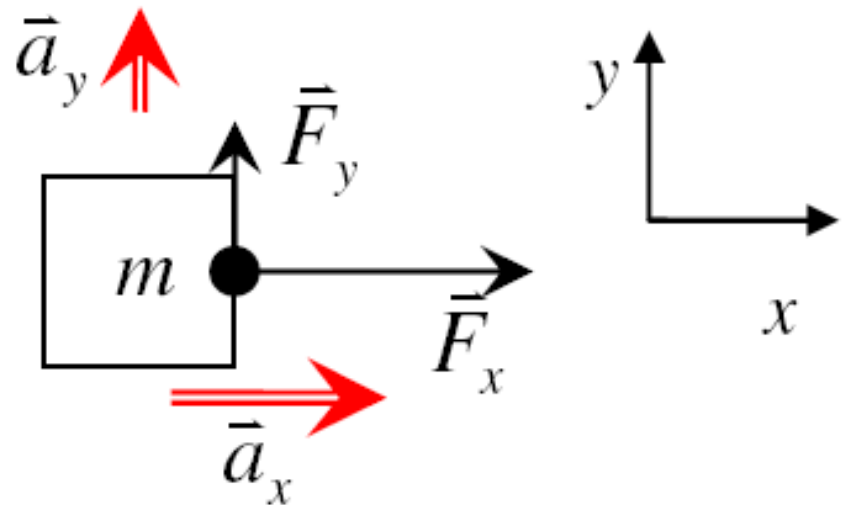
# Décomposition des forces, application de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton

Avant décomposition :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow$$

Après décomposition :

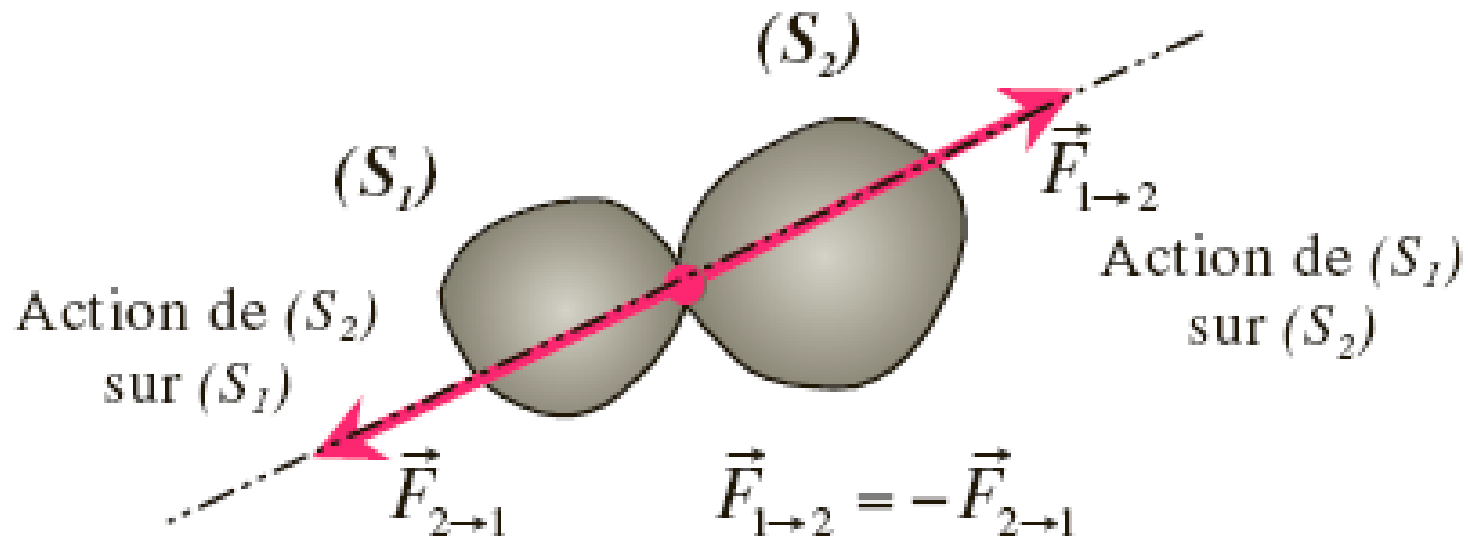


$$\sum F_x = ma_x \quad \text{où} \quad F_x = F \cos \theta$$

$$\sum F_y = ma_y \quad F_y = F \sin \theta$$

# Actions réciproques

## 3<sup>ème</sup> loi de Newton

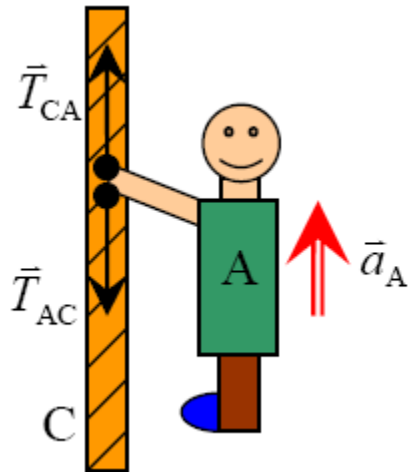


*Lorsque deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit le mouvement, l'action du système  $S_1$  sur le système  $S_2$  est exactement opposée à l'action simultanée (au même instant) du système  $S_2$  sur le système  $S_1$*

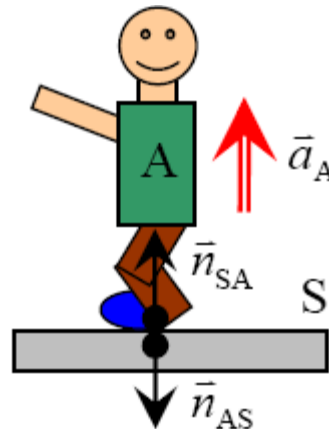
# Applications du 3<sup>ème</sup> principe

Prendre appui, communiquer des accélérations

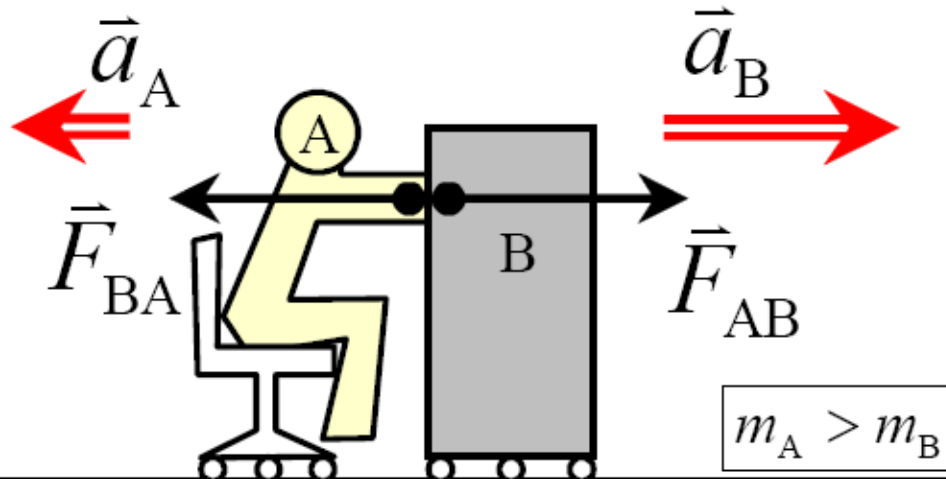
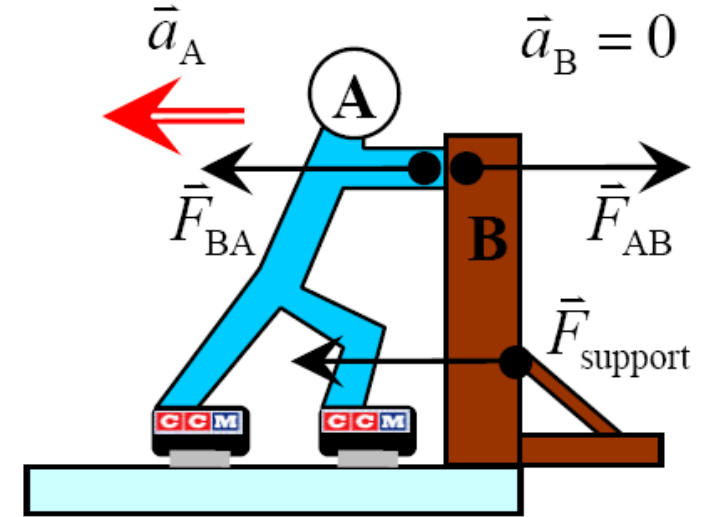
Tirer sur une corde pour de soulever



Appuyer pour sauter (danse, plongeon)



Appuyer pour se lancer



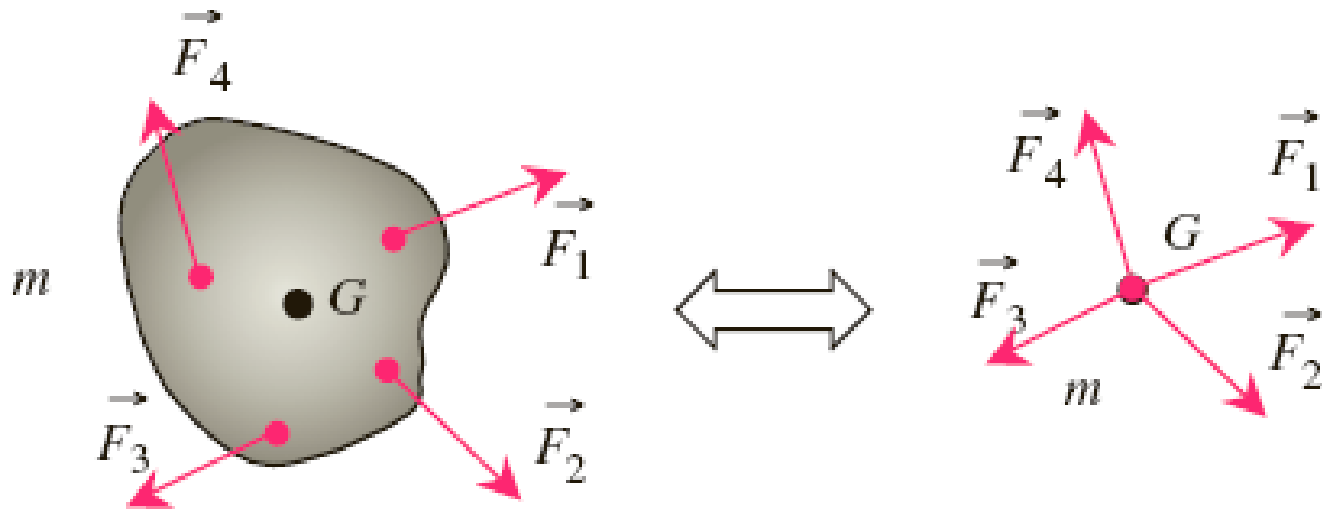
Communiquer une accélération

$$\vec{F}_{AB} = m_A \vec{a}_A ; \vec{F}_{BA} = m_B \vec{a}_B$$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} ; \vec{a}_B = -\frac{m_A}{m_B} \vec{a}_A$$



# Théorème du centre d'inertie



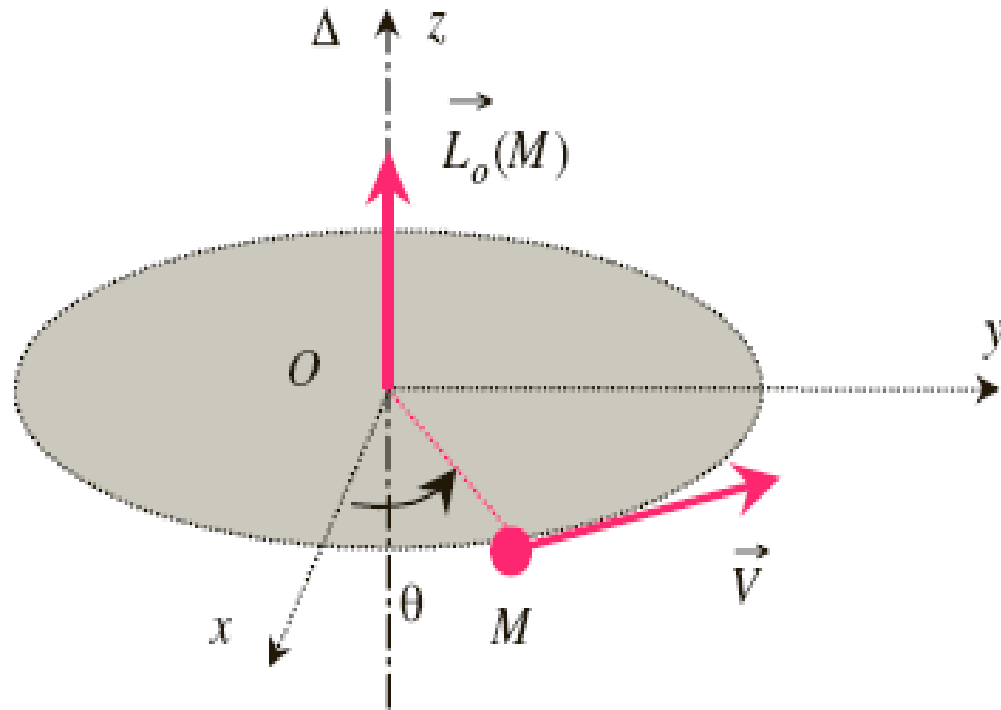
*Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système est le même que celui d'un point matériel coïncidant avec ce centre où la masse total serait concentrée et auquel toutes les forces agissant sur le système sont appliquées.*

# Théorème du moment cinétique

**Définition** : Le moment cinétique d'un point matériel  $M(m)$  par rapport à un point  $O$  fixe est défini par :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$$

**Théorème** : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à  $O$  fixe est égal au moment par rapport à ce point de la somme des forces appliquées à  $M$ .



$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}$$

# Force de gravitation

La force de gravitation est une force **à distance** (sans contact) **attractive** qui s'exerce entre deux masses :



$$\vec{F} = -G \frac{mM}{|OP|^2} \vec{u}_{OP}$$

$G =$  Constante de gravitation universelle  $= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$

La force exercée par *M* sur *m* est égale et opposée à la force exercée par *m* sur *M* (3<sup>ème</sup> loi de Newton)

## Application :

### Champ de gravitation de la terre

Un point de masse  $m$  situé à l'altitude  $z$  par rapport à la surface de la terre subit la force de gravitation terrestre :

$$\vec{F} = -G \frac{mM_T}{|OP|^2} \vec{u}_{OP} = -G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} m = -m\vec{g}$$

$\vec{g}$  est le champ de gravitation terrestre, accélération de la pesanteur

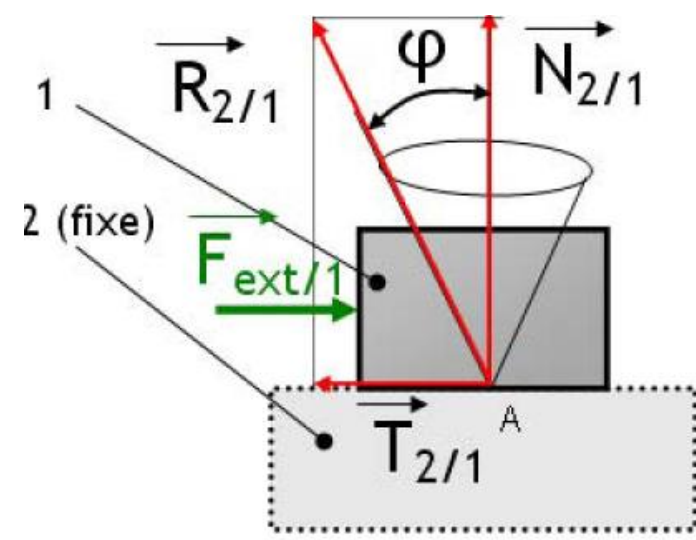
Pour des faibles altitudes  $z$ ,  $g$  est constant et vaut :

$$g = \frac{(6,67.10^{-11}).(6.10^{24})}{(6,37.10^6)^2} \approx 9,8 \text{ m.s}^{-2}$$

# Frottements

Frottement statique ou sec (Loi de Coulomb) : *force minimale nécessaire pour faire entrer en mouvement un corps au repos sur un support*

$T > N$  : 1 glisse sur 2,  $\mu_0$  coefficient de frottement statique



$$T_{2/1} = \mu_0 N_{2/1}$$

$$\mu_0 = \operatorname{tg} \varphi$$

Frottement de glissement : *force nécessaire à la conservation du mouvement de glissement uniforme du corps*  $T = \mu_g N$

Frottement de roulement : *force nécessaire à la conservation du mouvement de roulement uniforme du corps*  $T = \mu_r N$

$$\mu_r \ll \mu_g < \mu_0$$

- ✓ Effort plus important pour mettre en mouvement que pour pousser
- ✓ Distance de freinage plus grande en roues bloquées (frottement de glissement) que si les roues tournent (frottement de roulement)

# Méthode de résolution d'un problème de mécanique

- Préciser le système (réduction à un point matériel, centre d'inertie)
- Préciser le référentiel (galiléen pour appliquer les lois de Newton)
- Inventaire des forces appliquées (de contact, à distance, tensions, frottement)
- Appliquer le principe fondamental ou le théorème du moment cinétique (équations vectorielles)
- Choisir le repère sur lequel on projette ces équations
- Résoudre les équations obtenues
- Vérifier le sens physique

# Exemple : Pendule simple

Système : la masse ponctuelle  $M$

Référentiel : terrestre de point fixe

Forces : la tension du fil  $T$ , le poids vertical  $Mg$ , frottements négligeables

Équations vectorielles

$$\vec{P} = m\vec{g} ; \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Repère :

Coordonnées polaires (longueur  $l$  du fil constante et utiliser l'angle  $\theta$ )

$$\vec{P} + \vec{T} = m(-l\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{T} = -T\vec{u}_\rho$$

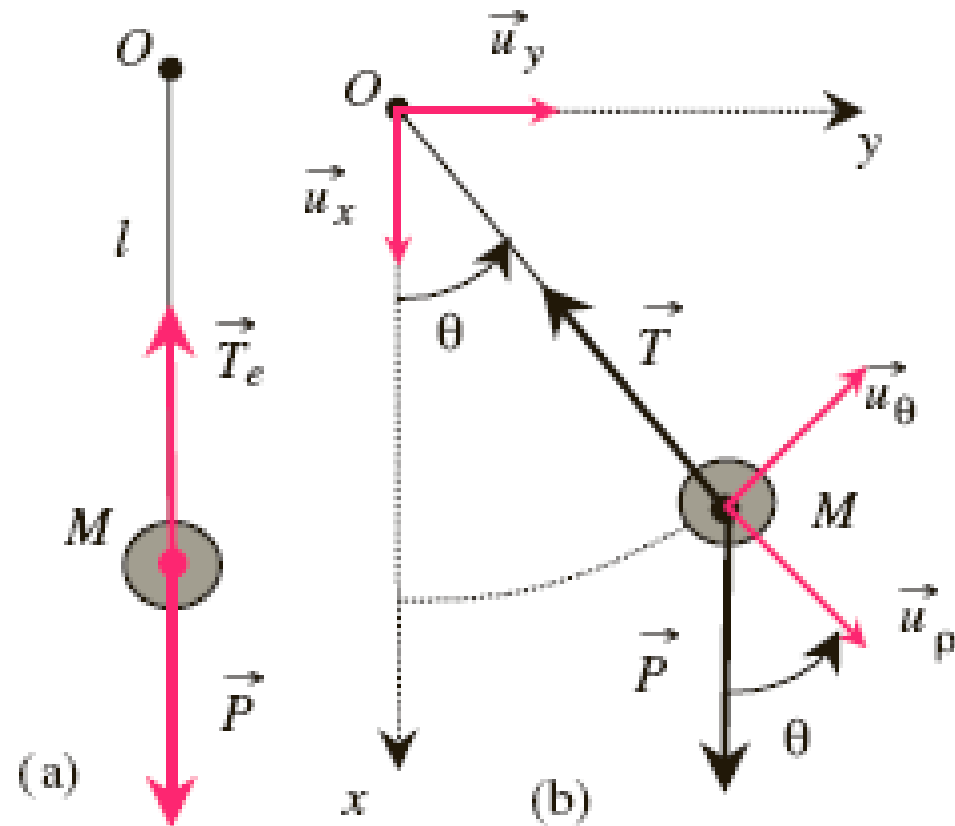
Résolution : Projeter sur les axes

Vérification du sens : Oscillations.

$$\theta \rightarrow 0 \sin \theta \approx \theta ; \ddot{\theta} + \frac{1}{g} \theta = 0$$

Équation de l'oscillateur harmonique de pulsation  $\omega$  :

$$\omega = \sqrt{\frac{l}{g}}$$



$$\ddot{\theta} + \frac{l}{g} \sin \theta = 0 : T = m(g \cos \theta - l\dot{\theta}^2)$$

# Force d'inertie de translation dans un repère non galiléen

Loi de Newton dans le repère absolu fixe (galiléen)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e$$

Loi de Newton dans le repère relatif (non

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e$$

*Tout système de masse  $m$  placé dans un repère en translation accélérée  $a_e$  par rapport à un repère fixe subit en plus des forces appliquées, une force d'inertie  $F_e$  dirigée dans le sens opposée de l'accélération*

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2}$$



# Forces d'inertie de rotation dans un repère non galiléen

Loi de Newton dans le repère absolu fixe (galiléen)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$$

Loi de Newton dans le repère relatif (non

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

*Tout système de masse  $m$  placé dans un repère de centre  $O$  en rotation circulaire uniforme de vitesse  $\omega$  autour d'un axe passant par  $O$  par rapport à un repère fixe subit en plus des forces appliquées :*

- une force d'inertie  $F_e$  dirigée vers l'extérieur du cercle*
- une force d'inertie de Coriolis  $F_c$  perpendiculaire à  $\vec{V}$*

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = +m\omega^2 \overrightarrow{O_1M}$$

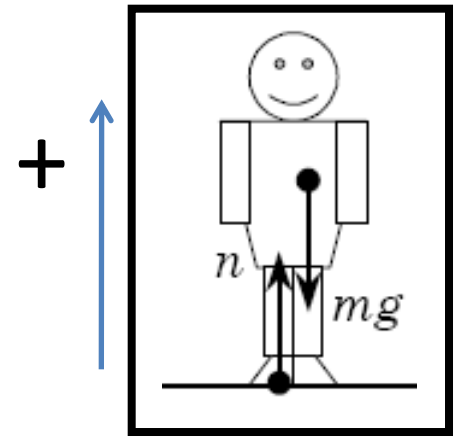
$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

# Manifestations des forces d'inertie

## 1. Force d'inertie en translation :

1.1 Poids apparent dans la cabine d'ascenseur

$$m\vec{a}_r = 0 = m\vec{g} + \vec{n} - m\vec{a}_e ; \quad \vec{n} = m(\vec{a}_e - \vec{g})$$



Lorsque l'ascenseur freine en descente :  $a_e$  opposée à la vitesse  $a_e > 0$   
 $n < mg$  . *Le poids ressenti par le plancher est plus léger que le poids réel. C'est le poids apparent.*

Écrire les mêmes équations avec l'allongement d'un ressort  $k$  accroché au plafond qui soutient le poids.

1.2 Force ressentie lors des freinages et accélérations d'un véhicule

## 2. Force d'inertie centrifuge en rotation :

2.1 création de gravité artificielle pour astronautes en entrainant l'habitable de rayon  $R$  en rotation avec une accélération centrifuge :  $\vec{g} = v^2/R$

2.2 Essoreuse (linge, salade.. : les gouttes d'eau sont éjectées par  $\vec{F}_e$  )

2.3 Séparation de liquides de densités différentes (sang)

## 2.4. Dérapage dans un virage

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = m\omega^2 R\vec{n} = \frac{mv^2}{R}\vec{n}$$

**Solution :** Relèvement du virage (angle  $\theta$ )

Analyse :

Forces appliquées : poids, réaction, frottement  $\mu_s$  , force d'inertie centrifuge

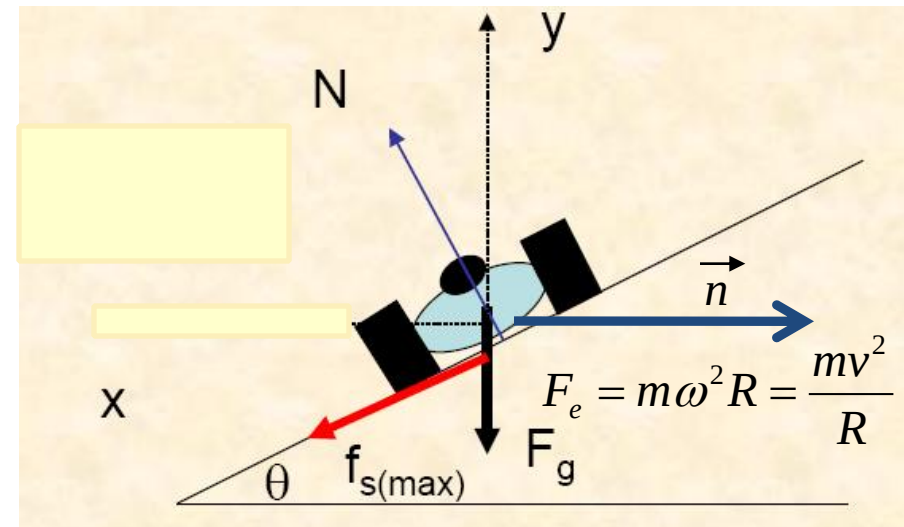
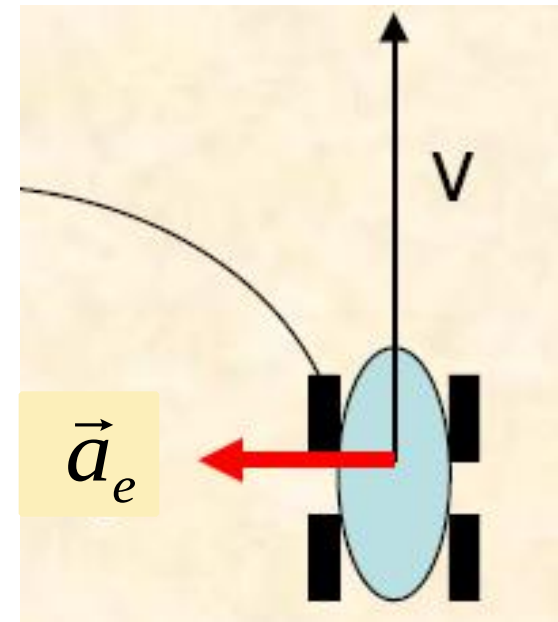
Solution : vitesse limite au virage

$$v^2 = gR \left( \frac{\tan \theta + \mu_s}{1 - \mu_s \tan \theta} \right) \quad \mu_s = \frac{f_s}{N}$$

A.N.  $\theta = 20^\circ$ ;  $R = 100 \text{ m}$

sol sec :  $\mu_s = 0,5 \rightarrow v = 14,4 \text{ m/s} (51,8 \text{ km/h})$

sol glissant :  $\mu_s = 0,1 \rightarrow v = 9,7 \text{ m/s} (35 \text{ km/h})$



[Réf. Force centripète. Site cegep](#)

### 3. Force de Coriolis

3.1 Mouvements de l'air, anticyclones et dépressions

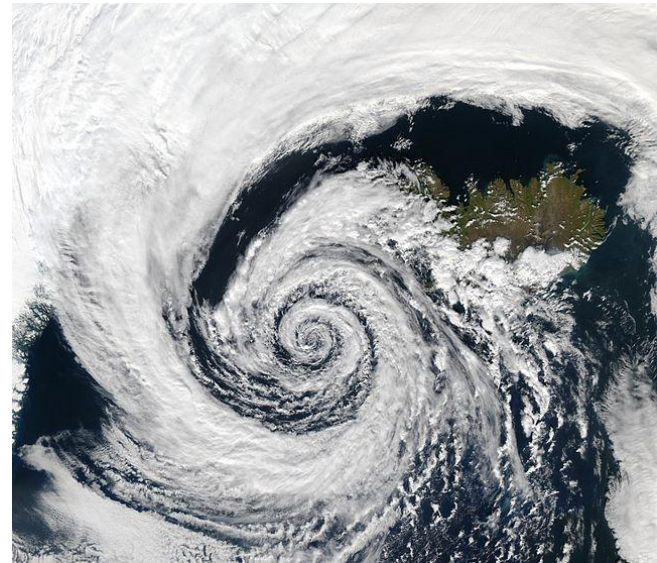
3.2 Déviation du projectile de longue portée

3.3 Déplacements de masses d'air, nuages, mers et océans

3.4 Déviation des oscillations d'un pendule (pendule de Foucault)

3.5 Déviation vers l'est de la chute libre

*Effet sur la  
trajectoire  
d'un corps en  
mouvement  
non accéléré*



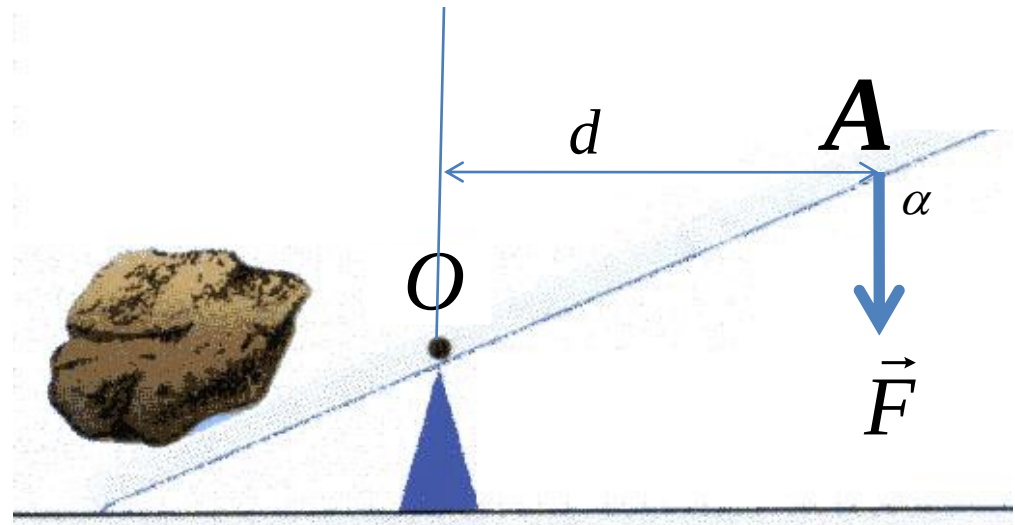
# Équilibre des systèmes : statique

**Moment d'une force** : *Il mesure la capacité d'une force à produire une rotation. A point d'action de la force, O axe de rotation  $\perp$  plan de la figure*

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

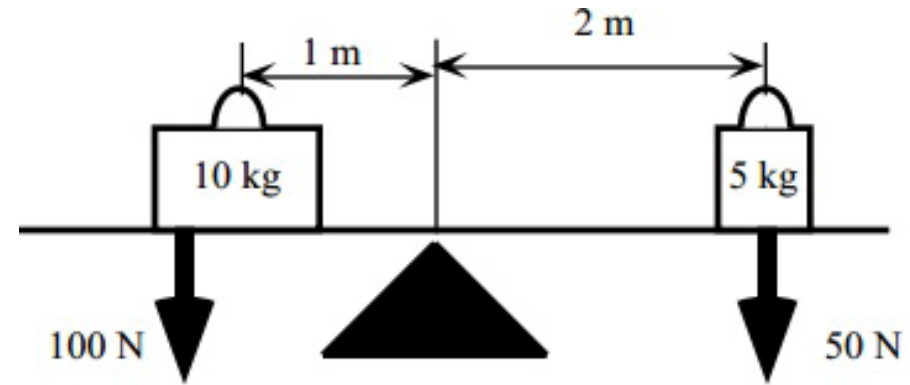
*d est la distance entre la droite qui porte  $F$  et la droite qui lui est parallèle et qui passe par O.*

$$\Gamma_O = F.OA.\sin \alpha = F.d$$



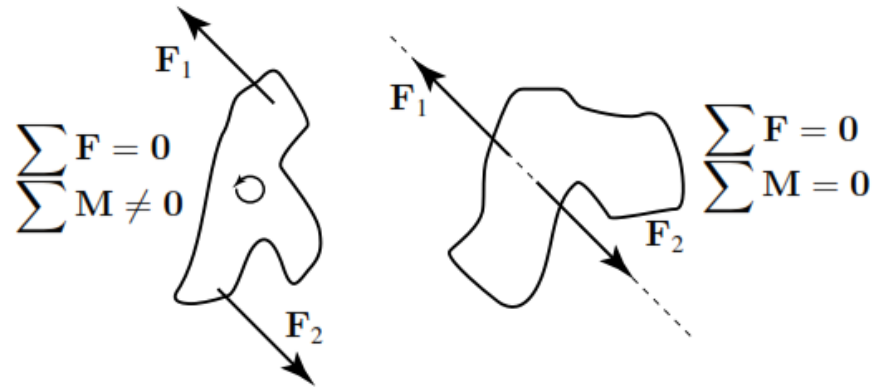
# Condition d'équilibre

*Le moment du poids de 5kg produit une rotation de la barre à droite, le moment de 10 kg produit une rotation à gauche. Les 2 moments sont égaux : pas de mouvement. Barre en équilibre.*



$$50N \times 2m = 100N \times 1m$$

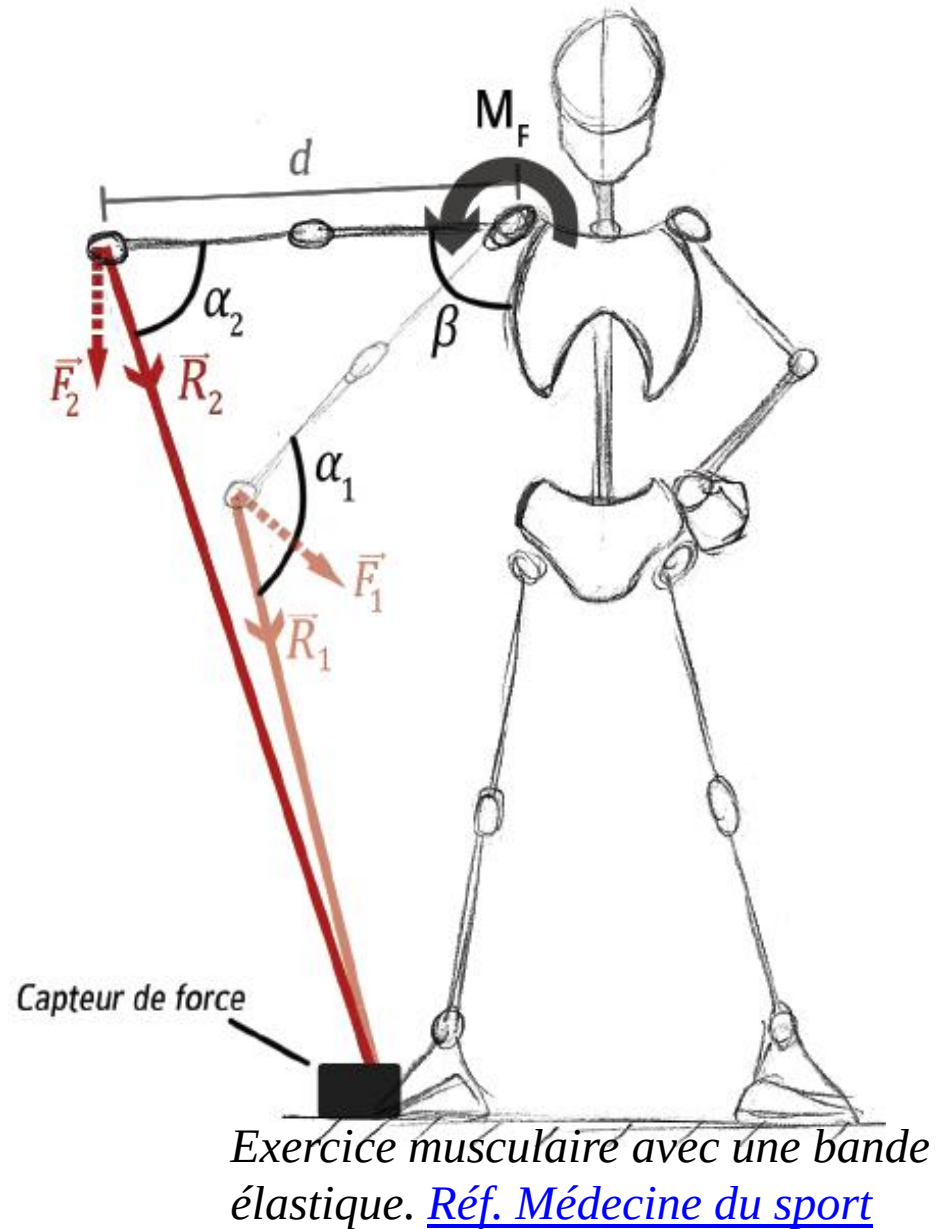
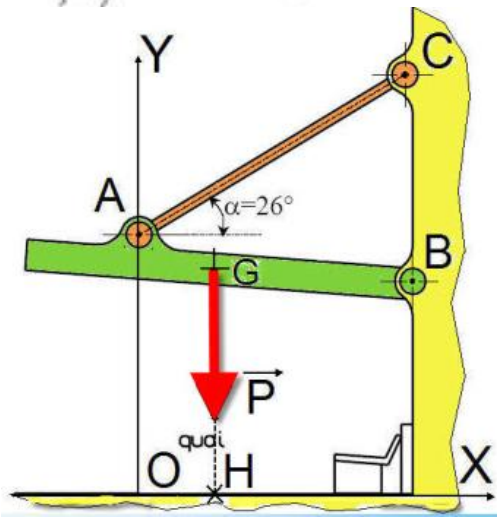
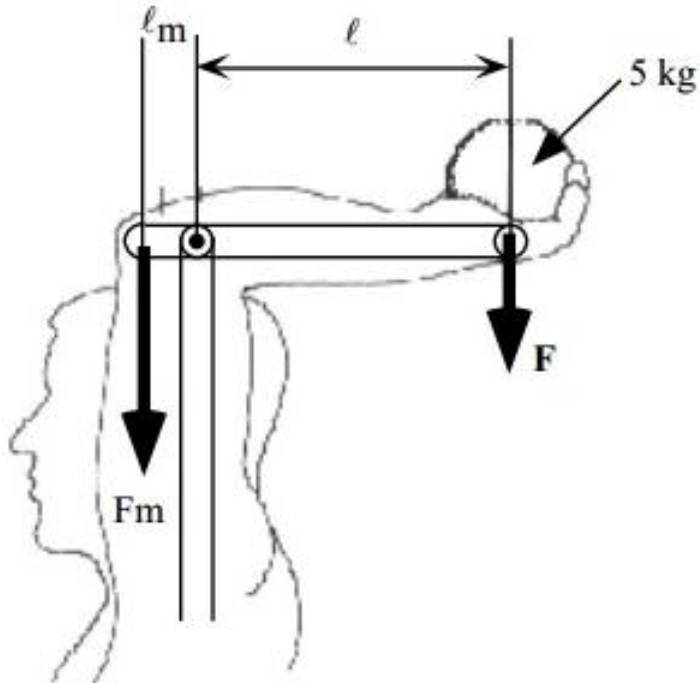
Conditions générales de l'équilibre d'un solide soumis à des forces



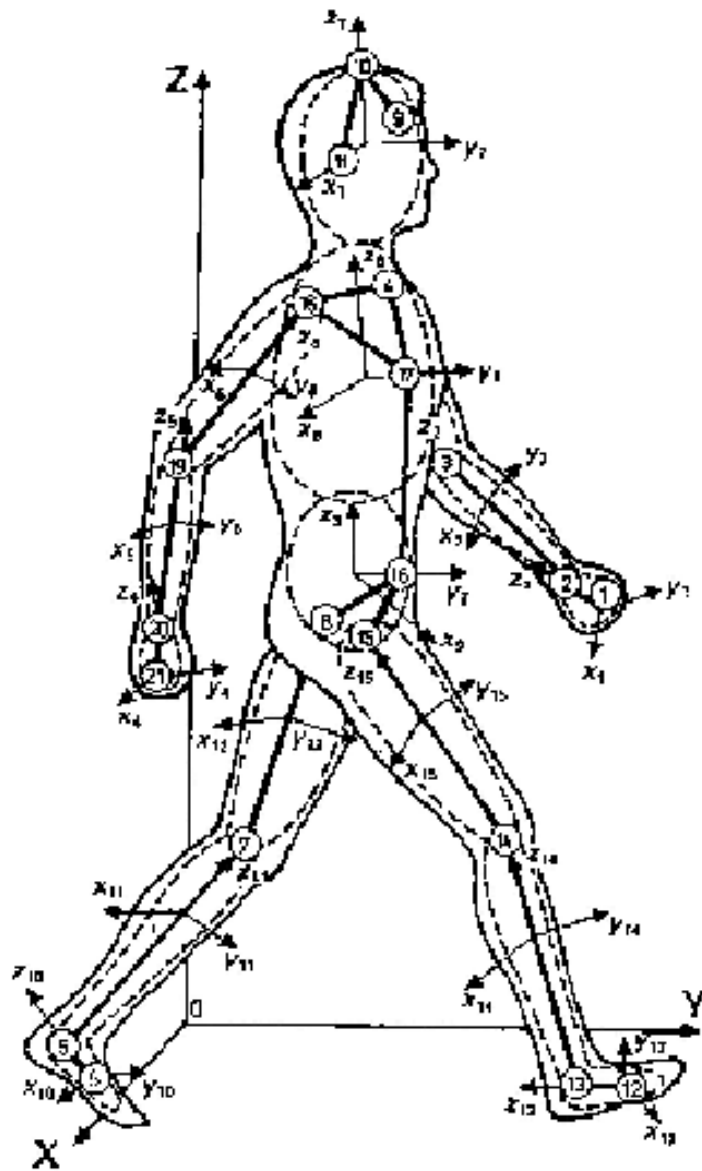
$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \sum \vec{\Gamma}_G(\vec{F}_i) = \sum \overrightarrow{GA_i} \wedge \vec{F}_i = 0$$



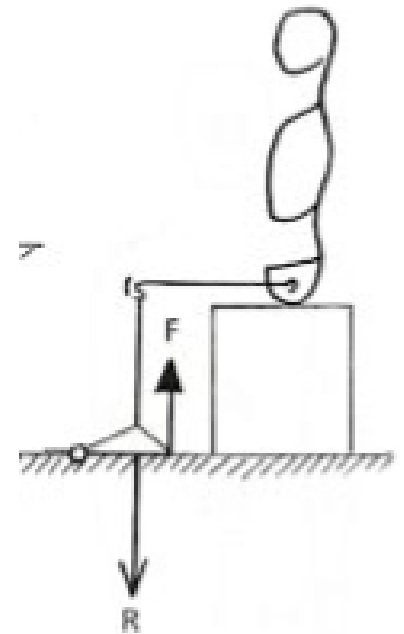
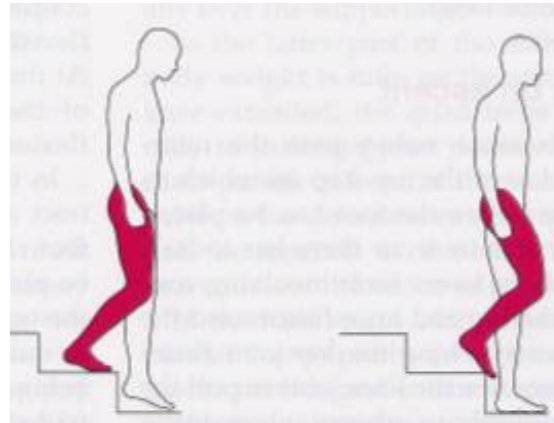
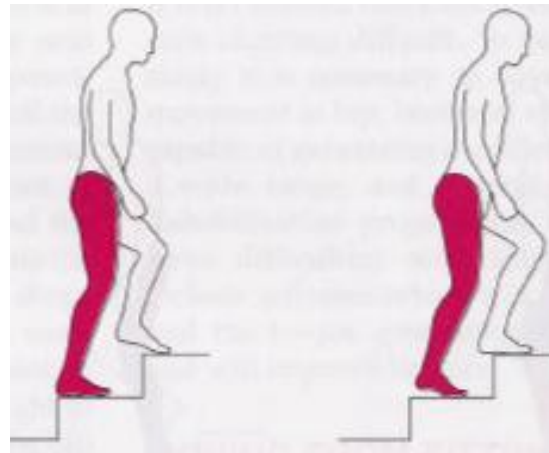
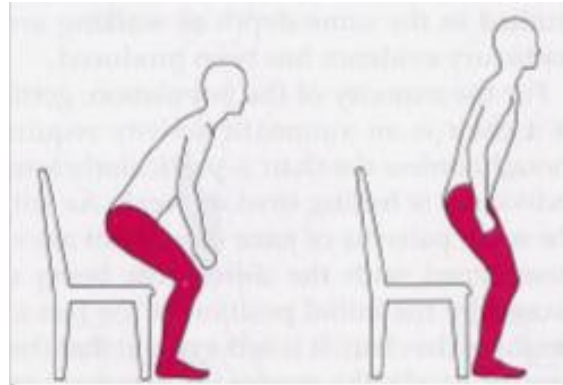
# Autres exemples



# Biomécanique



Biomécanique articulaire



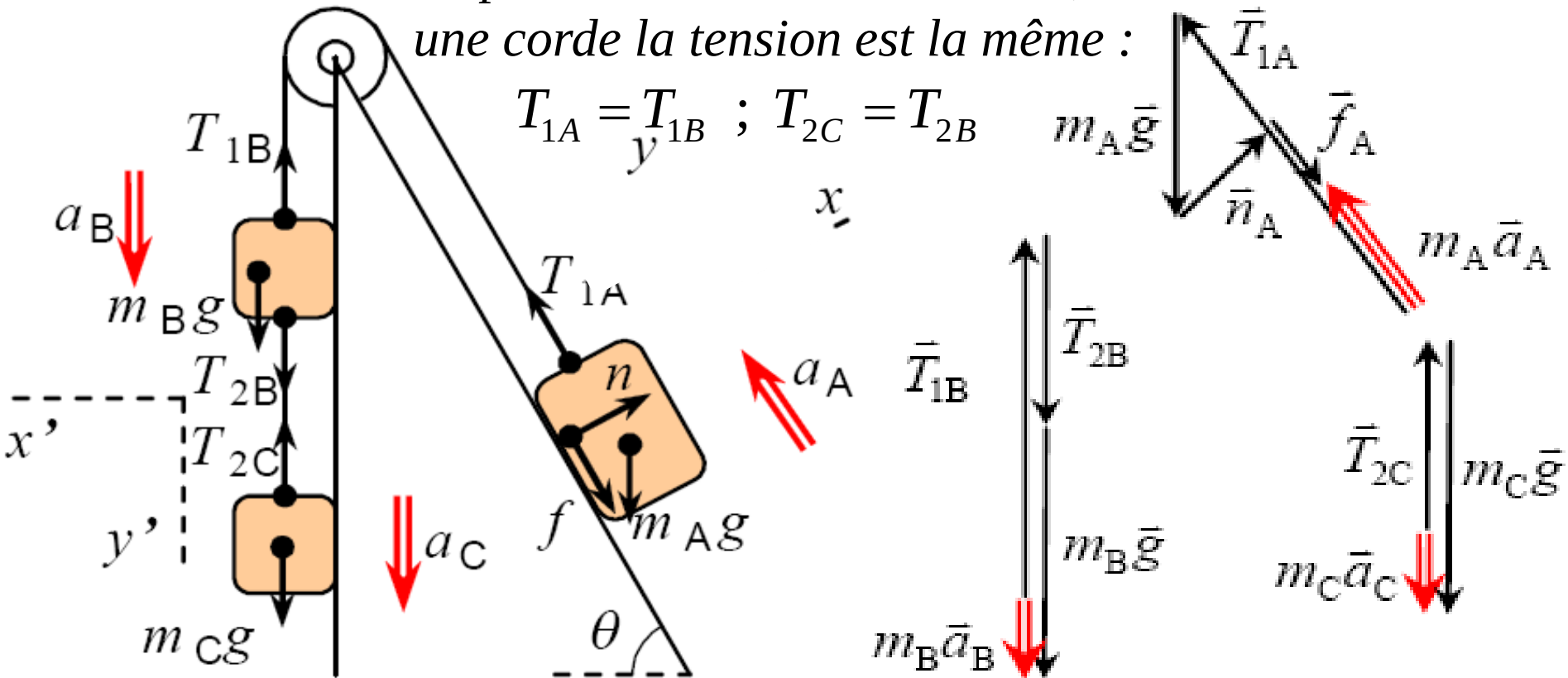


# Transmission des mouvements

Translation  $\longrightarrow$  rotation  $\longrightarrow$  translation (tension des cordes)

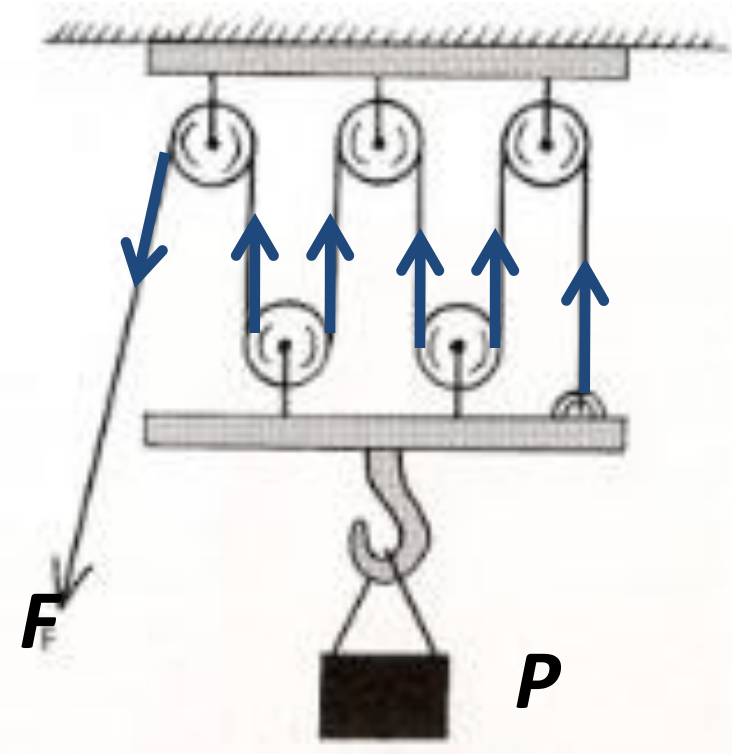
*La poulie transmet les tensions, sur une corde la tension est la même :*

$$T_{1A} = T_{1B} ; T_{2C} = T_{2B}$$



$$|\vec{a}_a| = |\vec{a}_b| = |\vec{a}_c| = a ; a = \frac{m_B + m_C - m_A (\sin \theta + \mu \cos \theta)}{m_A + m_B + m_C} g$$

# Moufle



*La tension est la même sur chaque brin de la corde.  
Le plateau du bas est en équilibre :*

$$P=5T, T=F=P/5$$

