المعادلات و المتراجحات من الدرجة الاولى والثانية بمجهول واحد

القدرات المنتظرة

***- حل معادلات أو متراجحات تؤول في حلها إلى معادلات أو متراجحات من الدرجة 1 أو 2 بمجهول واحد.**

***- ترييض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات.**

I) تعاريف

أنشطة

1- حل المعادلتين التاليتين $x \in \mathbb{R} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2}$ K $x \in \mathbb{N} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2}$

2- حل المتراجحة $x \in \mathbb{R} \quad 5x-7 \leq \frac{11}{2}x+4$

تعريف1

جميع حلول معادلة (أو متراجحة) تكون مجموعة تسمى مجموعة حلول المعادلة (أو المتراجحة) نرمز لها بـ S أو S' أو.......

تعريف2

نقول ان معادلتين (أو متراجحين) متكافئتان إذا كانت للمعادلتين (أو للمتراجحتين) نفس مجموعة الحلول.

II) المعادلة التالفية

1- مفهوم معادلة تالفية

تعريف

كل معادلة يمكن كتابتها على شكل $ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$ تسمى معادلة تالفية.

و تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

2- حل معادلة تالفية

نحل المعادلة $ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$

إذا كان $a=b=0$ فان $S=\mathbb{R}$

إذا كان $a=0$ و $b \neq 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $a \neq 0$ فان $ax+b=0$ تكافئ $x=-\frac{b}{a}$ أي أن $S=\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

3- حل المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0 \quad x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

$(ax+b)(cx+d)=0$ تكافئ $ax+b=0$ أو $cx+d=0$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0 \quad x \in \mathbb{R}$ هي اتحاد مجموعة حلول المعادلة $ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$ و $cx+d=0 \quad x \in \mathbb{R}$

تمرين: حل المعادلة $(2x+1)(-3x-5)=0 \quad x \in \mathbb{R}$

III) المتراجحات التالفية بمجهول واحد

1- تعريف

كل متراجحة يمكن كتابتها على شكل $ax+b \prec 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \succ 0 \quad x \in \mathbb{R}$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$، تسمى متراجحة تالفية.

و تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

2- حل متراجحة تالفية بمجهول واحد

أ- إشارة الحدانية $ax+b$

*- إذا كان $a=0$ فان إشارة $ax+b$ هي إشارة b

*- إذا كان $a \neq 0$ فان $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ و بالتالي إشارة $ax+b$ مرتبطة بإشارة a و $x+\frac{b}{a}$

$x+\frac{b}{a} \succ 0$ تكافئ $x \succ -\frac{b}{a}$

$x+\frac{b}{a} \prec 0$ تكافئ $x \prec -\frac{b}{a}$

نلخص هذه الدراسة في جدول يسمى جدول إشارة $ax+b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

تمرين

حل المتراجحتين: $2x+3 \prec 0 \quad x \in \mathbb{R}$; $-3x+4 \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ بطريقتين مختلفتين.

3- حل المتراجحة $(ax+b)(cx+d) \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو من نوع $(ax+b)(cx+d) \succ 0 \quad x \in \mathbb{R}$

حل هذا النوع من المتراجحات يعتمد على دراسة إشارة $(ax+b)(cx+d)$ بتوظيف إشارة كل من $(ax+b)$ و $(cx+d)$

تمرين

حل المتراجحتين: $(2x+1)(-3x+1) \prec 0 \quad x \in \mathbb{R}$; $(-2x-1)(-5x+1) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

IV) المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{R}$ كل معادلة على الشكل $ax^2+bx+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

2- أمثلة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$3x^2-\sqrt{3}x=0$ ، $x^2-5=0$ ، $2x^2+1=0$ ، $x^2-6x-7=0$ ، $x^2-2x+3=0$

3- صفة عامة

a) نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0 \quad x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$

لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

الكتابة $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ **يسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود** ax^2+bx+c

لنحل المعادلة

$ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد b^2-4ac الذي يسمى **مميز المعادلة** $ax^2+bx+c=0$ نرمز له بـ Δ نكتب $\Delta=b^2-4ac$

* إذا كان $\Delta \prec 0$ فان $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} \succ 0$ و بالتالي المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$

* اذا كان $\Delta=0$ فان $x+\frac{b}{2a}=0$ أي $x=-\frac{b}{2a}$

* اذا كان $\Delta \succ 0$ فان $ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$

تكافئ $\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

تكافئ $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

مبرهنة

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ و S مجوعة حلولها في $\mathbb{R}$.

العدد b^2-4ac يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود ax^2+bx+c نرمز له بـ Δ

إذا كان $\Delta\prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta=0$ فان $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta\succ 0$ فان $S=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

اصطلاح

إذا كان $\Delta=0$ فان $x=-\frac{b}{2a}$ في هذه الحالة نقول إن $-\frac{b}{2a}$ حل مزدوج للمعادلة

ملاحظة إذا كان a و c لهما إشارتين مختلفتين فان للمعادلة حلين.

تمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$5x^2-4x+2=0 \qquad x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

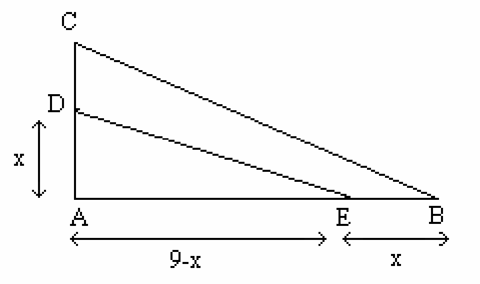
$$4x^2+3x-1=0 \qquad x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0$$

تمرين

نعتبر ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB=9$ و $AC=4$ حدد موضع نقطتين E و D تنتميان

على التوالي لـ$[AB]$ و $[AC]$ بحيث $AD=BE$ و مساحة ADE تساوي مساحة الرباعي $BCDE$

اختيار المجهول نضع $AD=BE=x$



مساحة ADE هي $\frac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي $BCDE$ هي $\frac{4\times 9}{2}-\frac{x(9-x)}{2}$

لدينا $\frac{4\times 9}{2}-\frac{x(9-x)}{2}=\frac{x(9-x)}{2}$

ومنه $18-9x+x^2=0$.......

b) نتيجة

نعتبر معادلة من شكل $ax^2+2b'x+c=0$ و $a\neq 0$

لدينا $\Delta=4(b'^2-ac)$ نضع $\Delta'=b'^2-ac$

اشارة Δ هي اشارة Δ'

إذا كان $\Delta'\prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta'=0$ فان $S=\left\{-\frac{b'}{a}\right\}$

إذا كان $\Delta'\succ 0$ فان $S=\left\{\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$

العدد Δ' يسمى المميز المختصر للمعادلة

تمرين

حل $6x^2-2\sqrt{3}x-1=0 \qquad x\in\mathbb{R}$

4- تعميل ثلاثية الحدود

نعتبر ثلاثية الحدود $T(x)=ax^2+bx+c \quad / \quad a\neq 0$

ليكن Δ مميزها

* إذا كان $\Delta\prec 0$ فان $T(x)$ لا تقبل جدرا و بالتالي $T(x)$ لا يمكن تعميلها في $\mathbb{R}$

* إذا كان $\Delta=0$ فان $T(x)$ لها جدر وحيد $\frac{-b}{2a}$ وبالتالي $T(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

* إذا كان $\Delta\succ 0$ فان $T(x)$ لها خدرين مختلفين x_1 و x_2

وبالتالي $T(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

تمرين

عمل $P(x)=3x^2-4x-4 \qquad Q(x)=x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

5- معادلات تؤول في حلها الى معادلات من الدرجة الثانية

مثال1 حل $x^4-7x^2+12=0 \quad x\in\mathbb{R}$

مثال2 حل $2x-7\sqrt{x}-4=0 \quad x\in\mathbb{R}$

مثال3 نعتبر $P(x)=2x^3-3x^2-x+1$

أحسب $P\left(\frac{1}{2}\right)$

حل المعادلة $P(x)=0$

6- مجموع و جداء جدرى ثلاثية الحدود

نعتبر $ax^2+bx+c=0 \quad x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$

لنفترض أن $\Delta\succ 0$ و أن جذريها هما x_1 و x_2

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

إذن $x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$

خاصية

إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0 \quad x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ حلان x_1 و x_2 فانهما يحققان العلاقتين

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

تمرين

تأكد أن للمعادلة $4x^2-7x+5=0$ جدران x_1 و x_2 ثم أحسب $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ دون حساب x_1 و x_2

VI- المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- اشارة ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية

نعتبر ثلاثية الحدود $T(x)=ax^2+bx+c \quad / \quad a\neq 0$

ليكن Δ مميزها

الشكل القانوني $T(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فان ax^2+bx+c يكون منعدما من أجل $x=\frac{-b}{2a}$ و إشارتها إشارة a لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \succ 0$ فان $T(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث x_1 و x_2 جدري ax^2+bx+c

نفترض أن $x_1 \prec x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		-	0	+		+	
$x-x_2$		-		-	0	+	
$T(x)$		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

خلاصة

إذا كان $\Delta \prec 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فان إشارة ax^2+bx+c هي إشارة a لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \succ 0$ و x_1 و x_2 جدري ax^2+bx+c حيث $x_1 \prec x_2$ فان

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$T(x)$		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

2- المتراجحات

أ- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات

$-2x^2+5x-3 \leq 0 \qquad 3x^2-2x-8 \prec 0$

$-3x^2+\sqrt{3}x-1 \geq 0 \qquad 4x^2-2x+1 \succ 0$

ب- متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الثانية

مثال1

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين

$$2x^4-9x^2+4 \succ 0$$

$$\frac{x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}}{x^2-x-2} \geq 0$$

مثال2

نعتبر $p(x)=6x^3-13x^2+4$

1- تأكد أن 2 جدر للحدودية $p(x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \leq 0$

3- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \leq 3x^2(x-2)$

تمرين

نعتبر $p(x)=-x^3+(3+a)x^2-(2+3a)x+2a$

1- بين أن a جدر للحدودية $p(x)$

2- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $p(x)=(x-a)Q(x)$

3- أ- أدرس إشارة $-x^2+3x-2$

4- ب- حل في $\mathbb{R}$ $p(x) \succ 0$ حيث $Q(a) \succ 0$