Amérique du Sud novembre 2008
EXERCICE 1 5 points
Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$a = -1 + 2\,i,\ b = 1 + 3\,i,\ c = 4\,i.$$

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2. Soit I le milieu de [BC] et z_I son affixe.

a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z - z_I}{z - a}$ soit un réel ?

b. Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x - z_I}{x - a}$ soit un réel.

c. Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.

3. *a.* Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

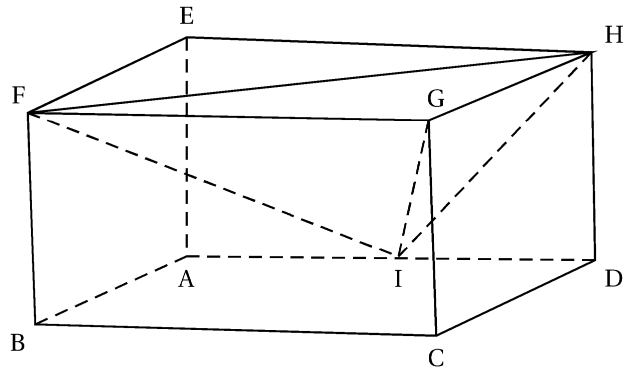
b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'écriture complexe de r_1.

4. Soit A′, B′ et C′ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.

Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ? En déduire que $b' = \overline{c'}$.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2. *a.* Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.

b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

4. *a.* La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou* d'*initiative même infructueuse sera prise en considération dans* l'*évaluation.*

Soit Γ la sphère de centre G passant par K. Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0 ; 0 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 1 ; 0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = -2 \end{cases}$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. Une équation de *S*

a. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite D.

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x ; y ; z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées : $\left(\dfrac{-x+y}{2} ; \dfrac{x-y}{2} ; 2 - z\right)$. En déduire MH^2 en fonction de x, y et z.

Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}x\,y$.

2. Étude de la surface S d'équation $z = -\dfrac{1}{4}x\,y$.

a. On coupe S par le plan (xOy). Déterminer la section obtenue.
b. On coupe S par un plan P parallèle au plan (xOy). Quelle est la nature de la section obtenue ?
c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.
On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, positive sur $[1\,;+\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(x\,y) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0{,}69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}$.

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

1. Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ (E), dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ (E′)

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur R par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(m\,x^2 + p\,x)$ soit solution de (E′).

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est solution de l'équation (E′) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E′).

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$.

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on note C la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \to e^{-\frac{x}{2}}$.

a. Étudier les positions relatives de C et Γ.
b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. $AB^2 = | b - a |^2 = | 2 + i |^2 = 5$; $AC^2 = | c - a | = | 1 + 2 i |^2 = 5$

AB = AC donc le triangle ABC est isocèle en A.

2. *a.* $\dfrac{z - z_I}{z - a}$ est un réel ⇔ il existe un réel k tel que $z - z_I = k\,(z - a)$ et $z \neq a$ ⇔ $\overrightarrow{IM} = k\,\overrightarrow{AM}$ et M ≠ A ⇔ M ≠ A et les points A, I, M sont alignés ⇔ M décrit la droite (AI) privée de A

b. Si $\dfrac{x - z_I}{x - a}$ est un réel alors le point M d'affixe x appartient à l'axe des réels et à la droite (AI) privée de A.

I est le point d'affixe $\dfrac{b+c}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}\,i$ donc le coefficient directeur de la droite (AI) est $\dfrac{3,5-2}{0,5+1}$ donc 1

Une équation de la droite (AI) est donc $y = x + 3$, cette droite coupe l'axe des abscisses quand $x = -3$.

c. $z_{\overrightarrow{AI}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}\,i + 1 - 2\,i = \dfrac{3+3\,i}{2} = \dfrac{3}{2}(1 + i)$

or $1 + i = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_{\overrightarrow{AI}} = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. *a.* Le point G a pour abscisse le réel solution de la question précédente. Il appartient donc à la droite (AI) contenant le sommet principal A et le milieu du côté opposé du triangle isocèle. Cette droite (AI) est donc hauteur, médiane, médiatrice et axe de symétrie du triangle ABC. Si G est le centre de la rotation alors il est invariant par celle-ci donc la droite (AI) est transformée en la droite (A'G).

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{GA}\right) = \arg(2 + 2i)$ donc $\left(\vec{u}, \overrightarrow{GA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ à 2π près

si A est transformé en un point A' d'abscisse positive, $\overrightarrow{GA'}$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GA'}) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{GA}\right)$ donc $-\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près

si A est transformé en un point A' d'abscisse négative, $\overrightarrow{GA'}$ est colinéaire à $-\vec{u}$ donc $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GA'}) = \left(-\vec{u}, \overrightarrow{GA}\right)$ donc $\pi - \dfrac{\pi}{4}$ à 2π près

Il existe donc deux rotations de centre G qui transforment A et I en deux points de l'axe des réels : la rotation r_1 d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et la rotation r_2 d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

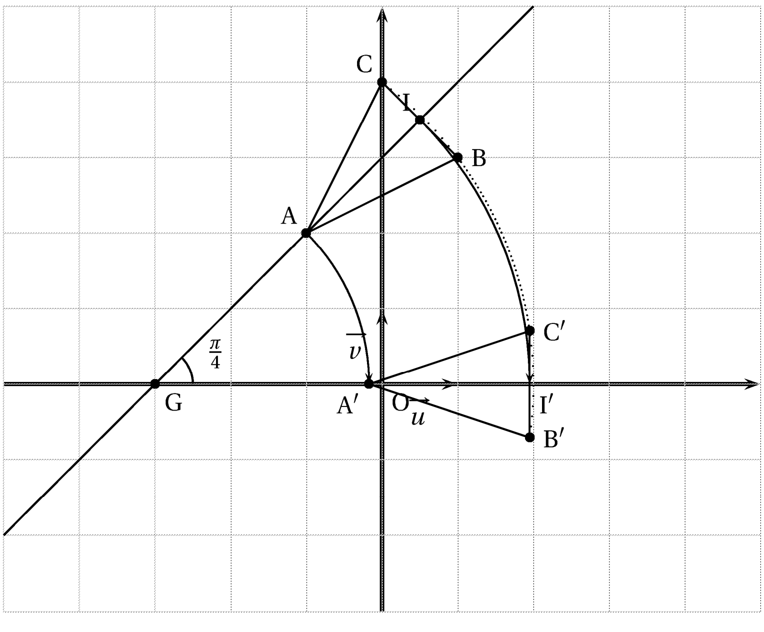
b. r_1 a pour écriture complexe est : $z' - z_G = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - z_G)$ soit $z' + 3 = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z + 3)$.

4. Le triangle ABC est isocèle en A donc droite (AI) est axe de symétrie du triangle ABC or G appartient à (AI)

Une rotation transforme une droite en une droite donc l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC est la droite (A'G)

r_1 est la rotation qui transforment A et I en deux points sur l'axe des réels donc (A'G) est l'axe des réels.

Une rotation conserve les distances et les angles orientés donc B et C étant symétriques par rapport à (AG), B' et C' sont symétriques par rapport à (A'G) donc par rapport à l'axe des réels donc $b' = \overline{c'}$.



EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc F a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}$ donc G a pour coordonnées (1 ; 2 ; 1)

$\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}$ donc H a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1)

2. *a.* La base du tétraèdre GFIH est le triangle FGH d'aire A = $\frac{1}{2} \times \text{FG} \times \text{GH} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

La hauteur du tétraèdre GFIH relative à cette base est [IJ] où J est le projeté orthogonal de I sur le plan (FGH) donc J est le milieu de [EH] donc $h = 1$

Le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3} \times \text{A} \times h = \frac{1}{3}$

b. F a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1) ; I (0 ; 1 ; 0) donc $\overrightarrow{FI}$ (– 1 ; 1 ; – 1) donc FI ^{2} = 3

H a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1) donc $\overrightarrow{HI}$ (0 ; 1 ; 1) donc HI ^{2} = 2 ;

$\overrightarrow{FH}$ a pour coordonnées (– 1 ; 2 ; 0) donc FH ^{2} = 5 donc FH ^{2} = FI ^{2} + IH ^{2}

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle FIH est rectangle en I.

L'aire du triangle FIH est égale à A' = $\frac{1}{2} \times \text{FI} \times \text{IH} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, soit d la distance du point G au plan (FIH).

V = $\frac{1}{3}$ A' $\times\, d = \frac{1}{3}$ soit $\frac{\sqrt{6}}{2}\, d = 1$ donc $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$

3. *a.* $\overrightarrow{IF}$ est le vecteur de coordonnées (1 ; – 1 ; 1) donc $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IF} = 2 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$

$\overrightarrow{IH}$ est le vecteur de coordonnées (0 ; 1 ; 1)donc $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IH} = 2 \times 0 + 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IH}$ donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

b. le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH) donc équation cartésienne du plan (FIH) est de la forme $2\,x + y - z + d = 0$

I $\in$ (FIH) donc $2 \times 0 + 1 - 0 + d = 0$ donc $d = -1$

Une équation cartésienne du plan (FIH) est $2\,x + y - z - 1 = 0$

c. La distance du point G au plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est $d = \frac{|\,a\,x_G + b\,y_G + c\,z_G + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

donc $d = \frac{|\,2\times1 + 2 - 1 - 1\,|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

4. *a.* $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées (1 ; 2 ; 1) donc n'est pas colinéaire à $\vec{n}$ vecteur normal au plan (FIH) donc (AG) n'est pas perpendiculaire au plan (FIH).

b. M $\in$ (AG) $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 2\,k \\ z = k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

K $\in$ (AG) $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que K $\begin{cases} x = k \\ y = 2\,k \\ z = k \end{cases}$ or K $\in$(FIH) $\Leftrightarrow 2\,x + y - z - 1 = 0$ donc les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH) vérifient $\begin{cases} x = k \\ y = 2\,k \\ z = k \end{cases}$ et $2\,k + 2\,k - k - 1 = 0$ soit $\begin{cases} x = k \\ y = 2\,k \\ z = k \end{cases}$ et $2\,k = 1 \Leftrightarrow$ K $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

5. Le rayon de la sphère est GK or $\overrightarrow{GK}$ $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} - 2 ; \frac{1}{3} - 1\right)$ soit $\left(\frac{1}{3} ; -\frac{4}{3} ; -\frac{2}{3}\right)$ donc GK ^{2} = $\frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{3}$

soit un rayon R = $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

La distance de G au plan (FIH) est $\sqrt{\frac{2}{3}}$ or $\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{\frac{7}{3}}$ donc la sphère coupe le plan (FIH) suivant un cercle.

<u>Pas demandé : déterminer le centre et le rayon du cercle :</u>

Le centre du cercle intersection de la sphère (S) et du plan (FIH) est Ω projection orthogonale de G sur (FIH),

Pour déterminer le point Ω, il suffit de :

- déterminer la droite orthogonale en G à (FIH)
- son point d'intersection avec le plan (FIH) d'où le point Ω

Pour déterminer le rayon R du cercle :

M étant un point du cercle, le triangle ΩMG est rectangle en Ω donc $\Omega\text{M}^2 + \Omega\text{G}^2 = \text{MG}^2$

ΩM = R ; ΩG = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et MG = $\sqrt{\frac{7}{3}}$ donc $\Omega\text{M}^2 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, le cercle est de rayon $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Une équation de *S*

a. D' est la droite de vecteur directeur $\vec{u'}$ de coordonnées (1 ; – 1 ; 0) or $\vec{u}\,.\,\vec{u'} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 0 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux et *D* et *D′* sont orthogonales

Si *D* et *D′* sont coplanaires, elles sont sécantes en un point M de coordonnées (t' ; – t' ; – 2) puisqu'il appartient à D', de plus le point M appartient à *D* donc $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées (t' ; – t' ; – 4). La dernière coordonnée n'étant pas nulle, $\overrightarrow{AM}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ donc *D* et *D′* ne sont pas coplanaires.

b. La droite *D* est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t' \in \mathbb{R}$

D est la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$

H le projeté orthogonal de *M* sur *D* donc $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et *H* a pour coordonnées (*t* ; *t* ; 2).

$\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $(t - x \,;\, t - y \,;\, 2 - z)$ et $\overrightarrow{MH}\,.\,\vec{u} = 0$ soit $(t - x) + (t - y) + 0 \times (2 - z) = 0$ soit $2t = x + y$ donc $t = \dfrac{x+y}{2}$

$\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées : $\left(\dfrac{-x+y}{2} \,;\, \dfrac{x-y}{2} \,;\, 2 - z\right)$.

$MH^2 = \left(\dfrac{-x+y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 + (2-z)^2$ donc $MH^2 = \dfrac{(x-y)^2}{2} + (2-z)^2$

c. un point *M* de coordonnées (*x* ; *y* ; *z*) appartient à *S* si et seulement $MH^2 = MK^2 \Leftrightarrow \dfrac{(x-y)^2}{2} + (2-z)^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$

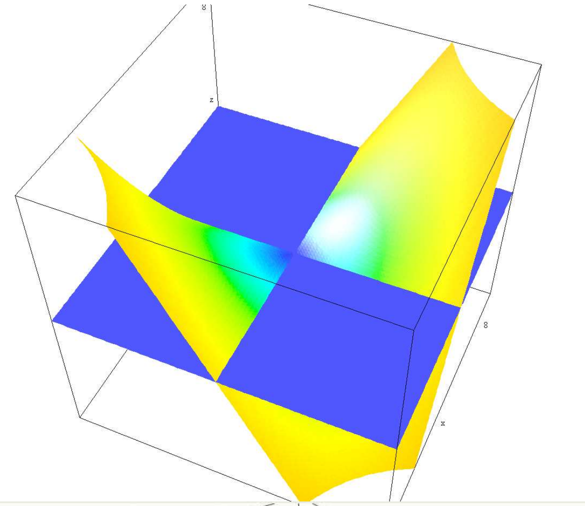
$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 2\,(2-z)^2 = (x+y)^2 + (2+z)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\,x\,y - 2\,z^2 - 8 - 8\,z = x^2 + y^2 + 2\,x\,y - 2\,z^2 - 8 - + 8\,z \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{4}x\,y.$

2. Étude de la surface *S* d'équation $z = -\dfrac{1}{4}x\,y$.

a. Une équation du plan (*x*O*y*) est *z* = 0. Un point appartient à l'intersection de *S* et du plan (*x* O *y*) si et seulement si ses coordonnées vérifient

$\begin{cases} z = -\dfrac{1}{4}x\,y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{4}x\,y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

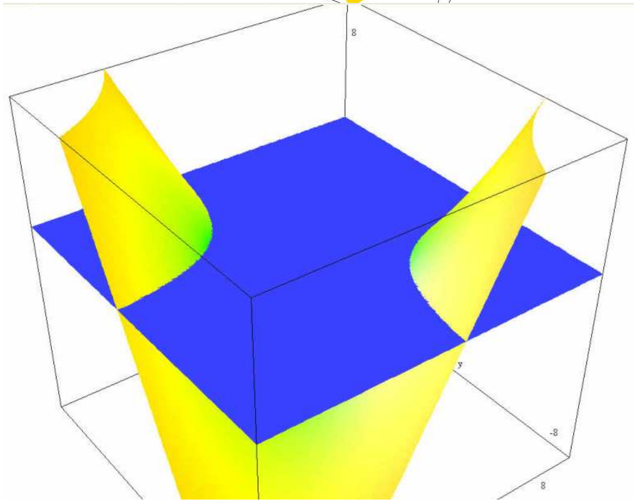
L'intersection de *S* et du plan (*x* O *y*) est donc la réunion des deux axes (O *x*) et (O *y*).



b. Une équation d'un plan *P* parallèle au plan (*x*O*y*) est $z = \lambda$. Un point appartient à l'intersection de *S* et du plan *P* si et seulement si ses coordonnées vérifient $\begin{cases} z = -\dfrac{1}{4}x\,y \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{4}x\,y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4\lambda}{x} \\ z = 0 \end{cases}$.

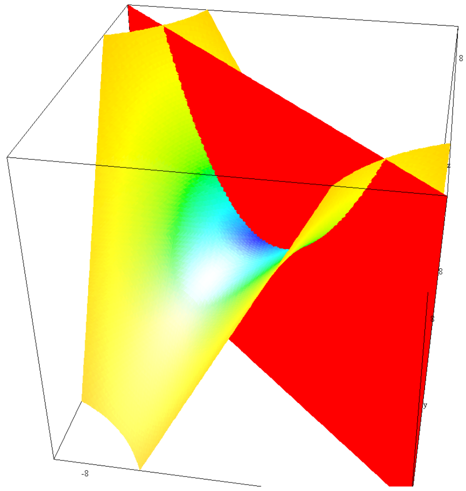
si $\lambda \neq 0$, la section de *S* par un plan *P* parallèle au plan (*x*O*y*) est une hyperbole.

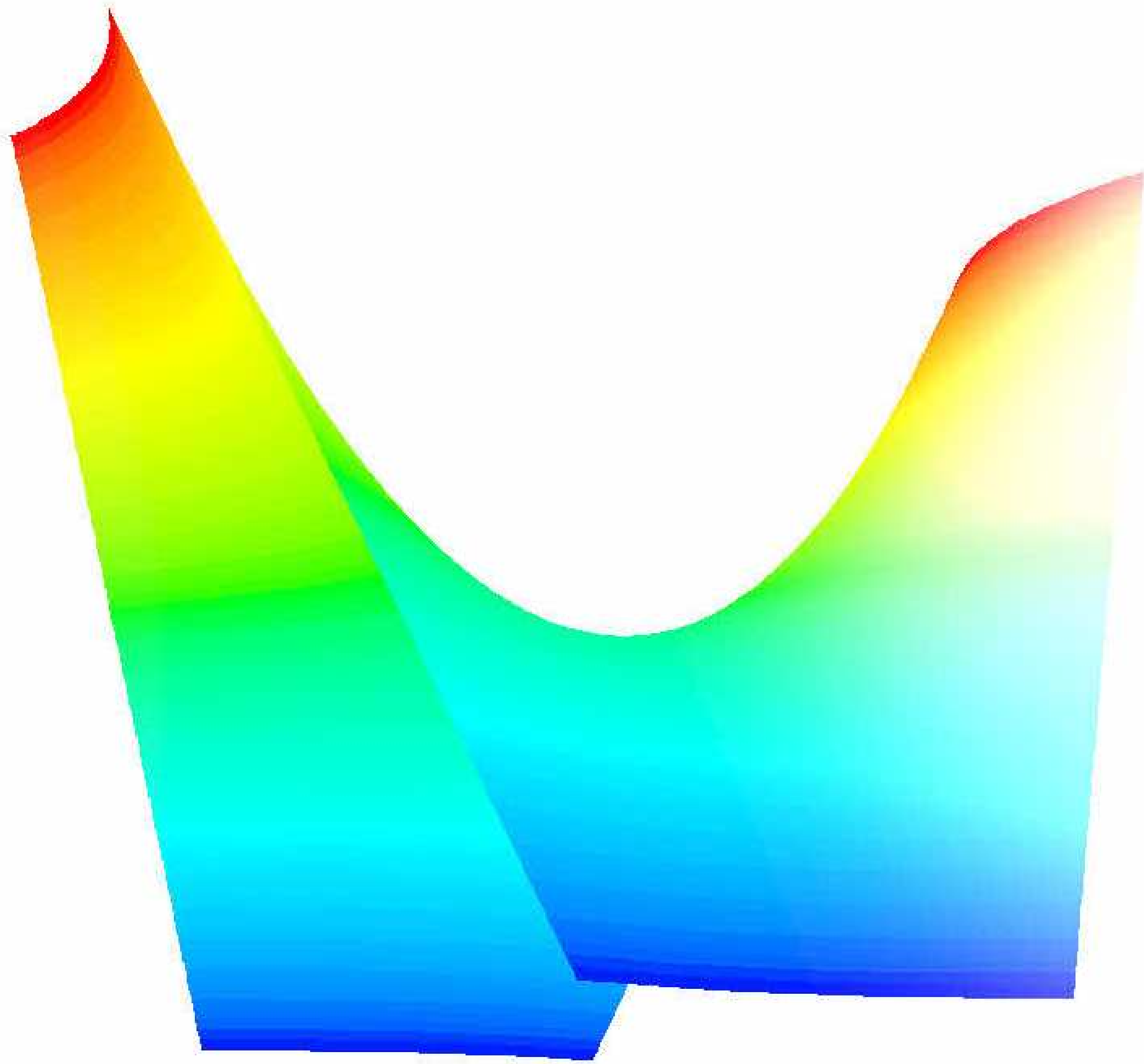


c. Un point appartient à l'intersection de S et le plan d'équation $x + y = 0$ si et seulement si ses coordonnées vérifient

$$\begin{cases} z = -\frac{1}{4}x\,y \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{4}x\,y \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{4}x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

la section de S par le plan d'équation $x + y = 0$ est une parabole.





EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

1. *a.* f est définie dérivable sur] 0 ; + ∞ [et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$

Si $x > 4$, $\sqrt{x} > 2$ donc $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur] 4 ; + ∞ [
$f'(4) = 0$
Si $0 < x < 4$, $0 < \sqrt{x} < 2$ donc $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur] 0 ; 4 [
f admet donc un minimum en 4

b. f admet donc un minimum en 4, donc pour tout x de] 0 ; + ∞ [alors $f(x) \geq f(4)$ soit $f(x) \geq 2 - 2\ln 2$
$\ln(2) \approx 0{,}69$ donc pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ donc $\ln x < \sqrt{x}$

Pour tout $x > 1$, $\ln x > 0$ donc $0 < \ln x < \sqrt{x}$ donc pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit $\mathrm{X} = x^{\frac{1}{n}}$ alors $x = \mathrm{X}^n$ donc $\ln x = \ln \mathrm{X}^n = n \ln x$ donc $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = n\dfrac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}}$

n est un entier naturel non nul, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to +\infty} \dfrac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

1. $2\,y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{2}y$

les solutions de l'équation différentielle : $2\,y' + y = 0$ (E), sont donc les fonctions de la forme $y(x) = k\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ avec k réel quelconque.

2. ***a.*** $f\,(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(m\,x^2 + p\,x)$ donc en posant $u(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et $v(x) = m\,x^2 + p\,x$ alors $u'(x) = -\dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et $v'(x) = 2\,m\,x + p$

$f\,'(x) = -\dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(m\,x^2 + p\,x) + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(2\,m\,x + p) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left[-\dfrac{1}{2}m\,x^2 + x\left(-\dfrac{1}{2}p + 2\,m\right) + p\right]$

donc $2\,f\,'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}[-\,m\,x^2 + x\,(-\,p + 4\,m) + 2\,p\,]$

f est solution de (E') $\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $2\,f\,'(x) + f\,(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$

$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}[-\,m\,x^2 + x\,(-\,p + 4\,m) + 2\,p\,] + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(m\,x^2 + p\,x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$

$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}[-\,m\,x^2 + x\,(-\,p + 4\,m) + 2\,p + m\,x^2 + p\,x] = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$

$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $4\,m\,x + 2\,p = x + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$ et $p = \dfrac{1}{2}$ donc pour tout x réel, $f\,(x) = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2\,x)$.

b. $g - f$ solution de (E) $\Leftrightarrow 2\,(g - f\,)' + g - f = 0 \Leftrightarrow 2\,g' + g = 2\,f\,' + f$

or d'après la question précédente : pour tout x réel, $2\,f\,'(x) + f\,(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$ soit en remplaçant :

$g - f$ solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $2\,g'(x) + g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x + 1) \Leftrightarrow g$ est solution de (E')

g solution de l'équation (E′) $\Leftrightarrow g - f$ solution de l'équation (E) $\Leftrightarrow g - f$ de la forme $y(x) = k\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ avec k réel quelconque.

$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $g(x) = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2\,x) + k\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ avec k réel quelconque $\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $g(x) = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2\,x + \mathrm{C})$ avec C réel quelconque.

3. En posant $u(x) = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et $v(x) = x^2 + 2\,x$ alors $u'(x) = -\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ et $v'(x) = 2\,x + 2$

donc $h'(x) = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(2\,x + 2) - \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2\,x)$ soit $h'(x) = \dfrac{1}{8}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(-\,x^2 - 2\,x + 4\,x + 4)$ soit $h'(x) = \dfrac{1}{8}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(-\,x^2 + 2\,x + 4)$

$-\,x^2 + 2\,x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{5}$ ou $x_2 = 1 - \sqrt{5}$

La fonction exponentielle est toujours positive donc $h'(x)$ a le même signe que $-\,x^2 + 2\,x + 4$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
h	$+\infty$	$\searrow$	$h(1-\sqrt{5}\,)$	$\nearrow$	$h(1+\sqrt{5}\,)$	$\searrow$	0

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x}{2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = +\infty$;

$x^2 + 2\,x$ est un polynôme donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 + 2\,x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

$h(x) = x^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 2\,x\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 4\times\dfrac{x}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$

Soit $\mathrm{X} = \dfrac{x}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{X} = +\infty$ et $h(x) = 4\,\mathrm{X}^2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{X}} + 4\,\mathrm{X}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{X}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\mathrm{X}^2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{X}} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\mathrm{X}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{X}} = 0$

donc $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} 4\,\mathrm{X}^2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{X}} + 4\,\mathrm{X}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{X}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

5. ***a.*** Pour étudier les positions relatives de C et Γ, il faut déterminer pour tout x réel, le signe de $h(x) - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

$h(x) - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2\,x) - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2\,x - 4)$

$x^2 + 2\,x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\,1 + \sqrt{5}$ ou $x_2 = -\,1 - \sqrt{5}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2+2x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative de C et Γ :		C est au dessus de Γ sur $]-\infty\,;-1-\sqrt{5}\,[$		C est en dessous de Γ sur $]-1-\sqrt{5}\,;-1+\sqrt{5}\,[$		C est au dessus de Γ sur $]-1+\sqrt{5}\,;+\infty\,[$	

Les courbes C et Γ ont deux points d'intersection a et B d'abscisses respectives $-1+\sqrt{5}$ et $-1-\sqrt{5}$.

b. En bleu la courbe C représentant la fonction *h*, en rouge Γ.
A et B sont les points d'intersection des deux courbes, C et D les points de C où la tangente est horizontale.