Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k ; 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.

Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par $a = 2n2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.

Affirmation : pour tout entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et à $n + 17$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère le point A d'affixe $3 + 4\,\mathrm{i}$.

On note s la similitude directe de centre A, de $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Affirmation : la similitude directe réciproque s^{-1} a pour écriture complexe : $z' = \frac{1-\mathrm{i}}{2} z + \frac{-1+7\mathrm{i}}{2}$.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = 1 + 2\,\mathrm{i},\ b = 4 - \mathrm{i},\ c = 1 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\,(3 + \sqrt{3}) \text{ et } d = 4 + \sqrt{3} + 4\,\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Affirmation : la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\frac{\pi}{3}$.

CORRECTION

1. Affirmation : VRAIE

Si $x = 9$ et $y = 13$ alors $3x - 2y = 3 \times 9 - 2 \times 23 = 1$ donc (3 ; 9) est solution de l'équation (E).

$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3 \times 9 - 2 \times 13 = 1 \end{cases}$ donc par différence membre à membre :

$3(x - 9) - 2(y - 13) = 0$ donc $3(x - 9) = 2(y - 13)$.

$x - 9$ est un entier relatif donc 3 divise $2(y - 13)$ or 3 et 2 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $y - 13$ donc $y - 13 = 3k$ $(k \in \mathbb{Z})$

En remplaçant dans $3(x - 9) = 2(y - 13)$ alors $x - 9 = 2k$

donc $x = 2k + 9$ et $y = 3k + 13$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k ; 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. Affirmation : VRAIE

$-2a + 3b = -2(3n + 1) + 3(2n + 3)$ donc $-2a + 3b = 7$ donc le PGCD de a et b divise 7.

Soit le PGCD de a et b est égal soit à 1, soit à 7.

Si PGCD(a ; b) = 7 alors7 divise a et 7 divise b alors $3n + 1 \equiv 0$ [7] et $2n + 3 \equiv 0$ [7]

donc $2(3n + 1) \equiv 0$ [7] et $3(2n + 3) \equiv 0$ [7]

soit $6n + 2 \equiv 0$ [7] et $6n + 9 \equiv 0$ [7] or $\begin{cases} 6 = 7 - 1 \text{ donc } 6 \equiv -1 \quad [7] \\ 9 = 7 + 2 \text{ donc } 9 \equiv 2 \quad [7] \end{cases}$ donc $6n + 2 \equiv -n + 2$ [7] et $6n + 9 \equiv -n + 2$ [7]

$\begin{cases} 6n + 2 \equiv 0 \quad [7] \\ 6n + 9 \equiv 0 \quad [7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n + 2 \equiv 0 \quad [7] \\ -n + 9 \equiv 0 \quad [7] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv 2$ [7]

donc PGCD(a ; b) = 7 $\Rightarrow n \equiv 2$ [7]

Réciproquement : Si $n \equiv 2$ [7], alors $n = 7k + 2$ donc $a = 3n + 1$

$a = 21k + 7 = 7(3k + 1)$

$b = 2n + 3 = 14k + 7 = 7(2k + 1)$

7 divise a et 7 divise b, donc 7 divise PGCD(a ; b)

or soit le PGCD de a et b est égal à 1 soit il est égal à 7 donc

$n \equiv 2$ [7] $\Rightarrow$ PGCD(a ; b) = 7.

D'où l'équivalence : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

3. Affirmation : FAUSSE

Si $n = 1$, $a = 30$ et $b = 4$ donc le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux 7 et à 2 or $n + 17 \neq 2$.

4. Affirmation : VRAIE

s^{-1} est la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

$\dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}}$ donc le rapport de la similitude directe S d'écriture complexe : $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{-1+7\,\mathrm{i}}{2}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et son angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

$\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}(3+4\,\mathrm{i}) + \dfrac{-1+7\,\mathrm{i}}{2} = \dfrac{3+4\,\mathrm{i}-3\,\mathrm{i}+4}{2} + \dfrac{-1+7\,\mathrm{i}}{2} = 3+4\,\mathrm{i}$ donc A est invariant par S

La similitude directe S d'écriture complexe : $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{-1+7\,\mathrm{i}}{2}$ a pour centre A, pour rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et pour angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

S a donc les mêmes éléments caractéristiques que s^{-1} donc $S = s^{-1}$.

La similitude directe réciproque $s - 1$ a pour écriture complexe : $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{-1+7\,\mathrm{i}}{2}$.

5. Affirmation : VRAIE

la similitude directe telle que $\begin{cases} A \to C \\ B \to D \end{cases}$ a pour angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC})$ et pour rapport $\dfrac{DC}{BA}$.

$a - b = -3 + 3\,\mathrm{i}$ et $c - d = -3 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\,(3 - 3\sqrt{3})$

$c - d = -3\,(1 + \sqrt{3}) + 3\,\mathrm{i}\,(1 - \sqrt{3})$.

$$\frac{c-d}{a-b} = \frac{-3[(1+\sqrt{3})+\mathrm{i}(-1+\sqrt{3})]}{-3(1-\mathrm{i})}.$$

$$\frac{c-d}{a-b} = \frac{[(1+\sqrt{3})+\mathrm{i}(-1+\sqrt{3})](1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$$ après avoir simplifié par -3.

$$\frac{c-d}{a-b} = \frac{(1+\sqrt{3})+\mathrm{i}(-1+\sqrt{3})+\mathrm{i}(1+\sqrt{3})-(-1+\sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{c-d}{a-b} = \frac{2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 2\,\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

La similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\dfrac{\pi}{3}$ et pour rapport 2.