Antilles-Guyane septembre 2008

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

2. *a.* Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Calculer S_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

CORRECTION

PARTIE A :

1. $1 + \frac{12}{5^0} = 13 = u_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$; si $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ alors $u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$

$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ et $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{12}{5^n}\right)+\frac{4}{5} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

$5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{12}{5^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2. *a.* $S_{n+1} - S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} - (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$

donc $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ or $u_{n+1} > 0$ donc $S_{n+1} - S_n > 0$, la suite (S_n) est strictement croissante.

b. $S_n = n + 1 + 12\left(1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^n}\right)$

$\left(1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^n}\right)$ est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ de premier terme 1

or $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc $S_n = n + 1 + 12\left(\frac{1-\frac{1}{5^{n+1}}}{1-\frac{1}{5}}\right)$ donc $S_n = n + 1 + \frac{12\times 5}{4}\times\left(1-\frac{1}{5^{n+1}}\right)$

$S_n = n + 16 - \frac{15}{5^{n+1}}$ soit $S_n = n + 16 - \frac{3}{5^n}$

c. $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{5^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

PARTIE B :

Proposition 1 : FAUX voir la partie A, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Proposition 2 : FAUX

la suite (u_n) de la partie A est décroissante car la suite de terme général $\frac{1}{5^n}$ l'est et on a vu que la suite (S_n) est croissante.