POLYNESIE JUIN 2007

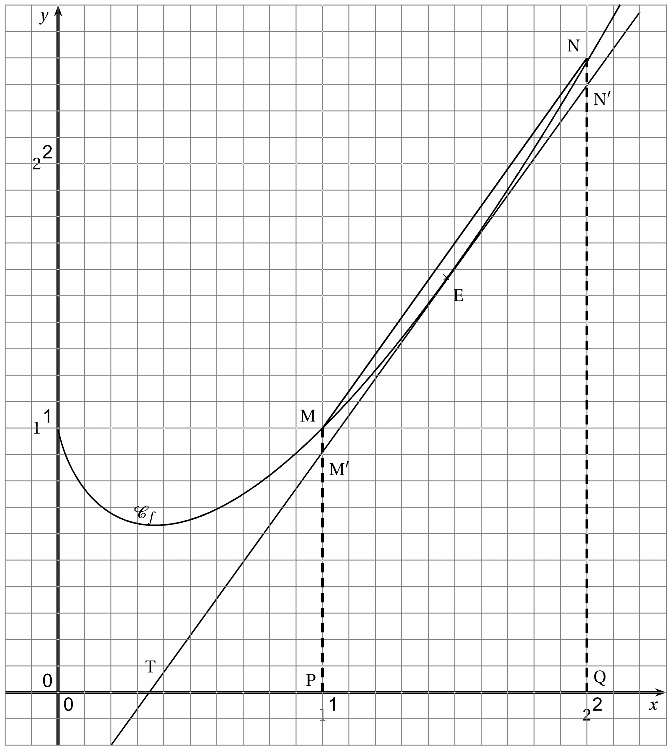
On considère la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = 1 + x \ln x$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire A du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On note M et N les points de C_f d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée ci-dessous.



1. *a*. Montrer que f est positive sur $[1\,;2]$.

***b*.** Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2 \ln 2$.

***c*.** Soit E le point d'abscisse $\dfrac{4}{e}$.

Montrer que, sur l'intervalle $[1\,;2]$, le point E est l'unique point de C_f en lequel la tangente à C_f est parallèle à (MN).

***d*.** On appelle T la tangente à C_f au point E.

Montrer qu'une équation de T est : $y = (2 \ln 2)\, x - \dfrac{4}{e} + 1$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;2]$ par : $g(x) = f(x) - \left[(2 \ln 2)\, x - \dfrac{4}{e} + 1\right]$.

***a*.** Montrer que pour tout x de $[1\,;2]$: $g'(x) = \ln x + 1 - \ln 4$.

***b*.** Étudier les variations de g sur $[1\,;2]$ et en déduire la position relative de C_f et de la tangente T sur cet intervalle.

3. Soient M′ et N′ les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T. On admet que la courbe C_f reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que les points M′ et N′ ont des ordonnées strictement positives.

***a*.** Calculer les aires des trapèzes MNQP et M′N′QP.

***b*.** En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de A d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de A.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$\int_1^2 x \ln x \, dx$.

2. En déduire la valeur exacte de A.

CORRECTION

Partie A

1. *a*. Si $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ donc $x \ln x \geq 0$ donc $f(x) \geq 1 > 0$

1. *b*. M est le point de coordonnées $(1\,;1)$

N est le point de coordonnées $(2\,;1 + 2 \ln 2)$

(MN) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{1 + 2\ln 2 - 1}{2 - 1}$ soit $2 \ln 2$.

1. *c*. La tangente au point d'abscisse x_0 est parallèle à (MN) si et seulement si $f'(x_0) = 2\ln 2$

$f'(x) = 1 + \ln x$ donc $f'(x) = 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln 2 - 1$

$\Leftrightarrow x = e^{2\ln 2 - 1} \Leftrightarrow x = e^{\ln 4} \times e^{-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{e}$

E est donc l'unique point de la courbe C_f où la tangente est parallèle à (MN).

1. *d*. T a pour coefficient directeur 2 ln 2

$f\left(\dfrac{4}{e}\right) = 1 + \dfrac{4}{e}\ln\left(\dfrac{4}{e}\right) = 1 + \dfrac{8}{e}\ln 2 - \dfrac{4}{e}$

E a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{e} ; 1 - \dfrac{4}{e} + \dfrac{8}{e}\ln 2\right)$

T a pour équation $y = (2\ln 2)\,x + b$

b est tel que $1 - \dfrac{4}{e} + \dfrac{8}{e}\ln 2 = 2\ln 2 \times \left(\dfrac{4}{e}\right) + b$

$b = 1 - \dfrac{4}{e}$ donc T a pour équation $y = (2\ln 2)\,x + 1 - \dfrac{4}{e}$

2. *a*. $g'(x) = f'(x) - 2\ln 2$

$g'(x) = \ln x + 1 - 2\ln 2 = \ln x + 1 - \ln 4$

$g'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) + 1$

2. *b*. $\ln\left(\dfrac{x}{4}\right) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) > -1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{4} > e^{-1}$

$\Leftrightarrow x > 4\,e^{-1}$

donc sur $[1 ; 4\,e^{-1}[$, $g'(x) < 0$ et sur $]\,4\,e^{-1} ; 2\,]$ $g'(x) > 0$

$g(4\,e^{-1}) = 0$

sur $[1 ; 4\,e^{-1}]$, g est décroissante et sur $[\,4\,e^{-1} ; 2\,]$ g est croissante.

$g(4\,e^{-1}) = 0$

donc pour tout x de $[1 ; 2]$, $g(x) \geq 0$

La courbe de f est donc au dessus de la tangente T sur $[1 ; 2]$.

3. M′ est le point de coordonnées $\left(1 ; (2\ln 2) + 1 - \dfrac{4}{e}\right)$

N' est le point de coordonnées $\left(2 ; 4\ln 2 + 1 - \dfrac{4}{e}\right)$

L'aire d'un trapèze est égale à $\dfrac{1}{2}(b + B) \times h$

où b est la petite base, B la grande base et h la hauteur du trapèze.

Le trapèze MNPQ a pour aire $\dfrac{y_M + y_N}{2} \times 1$ soit $\dfrac{3 + 2\ln 2}{2}$

Le trapèze M′N'PQ a pour aire $\dfrac{y_{M'} + y_{N'}}{2} \times 1$

soit $3\ln 2 + 1 - \dfrac{4}{e}$

donc $3\ln 2 + 1 - \dfrac{4}{e} \leq A \leq \dfrac{3 + 2\ln 2}{2}$

donc $1{,}6 \leq A \leq 1{,}7$

Partie B

1. $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx$

$\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$

$\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

2. $\displaystyle A = \int_1^2 (1 + x\ln x)\,dx = \int_1^2 1\,dx + \int_1^2 x\ln x\,dx$

$A = 2 - 1 + 2\ln 2 - 0{,}75$

$A = 0{,}25 + 2\ln 2$