

Exercice 1. 6 points Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une boîte contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.

Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.

Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.

On tire au hasard une médaille de la boîte. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

- A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;
- D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;
- B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;
- L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;
- S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

1. a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.

1. b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.

1. c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.

On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.

On note C l'évènement « la médaille est conforme ».

Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ .

2. a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?

2. b. Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millièème de σ .

Exercice 2. 3 points Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g .

Ces courbes sont données en annexe 1.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

Exercice 3. 6 points Commun à tous les candidats

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m , le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4} m^2 x + (m-1) y + \frac{1}{2} m z - 3 = 0$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A (1 ; 1 ; 1) appartient-il au plan P_m ?

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique :

$$(d) \begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

3. a. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

3. b. Justifier que pour tout réel m , le point B appartient au plan P_m .

3. c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m .

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leq m \leq 10 \text{ et } -10 \leq m' \leq 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

4. a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

4. b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{m m'}{4} \right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0$$

4. c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 : Pour m' allant de -10 à 10 : Si $(m m')^2 + 16 (m - 1) (m' - 1) + 4 m m' = 0$ Alors Afficher $(m ; m')$ Fin du Pour Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4 ; 1)$, $(0 ; 1)$ et $(5 ; -4)$.

Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

Exercice 4. 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n , par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe 2.

L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n .

1. a. Vérifier que : $\left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}}$

1. b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n , $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}}$

2. b. Pour quelles valeurs de n , les points O , A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

3. a. Interpréter géométriquement d_n .

3. b. Calculer d_0 .

3. c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) (z_{n+1} - z_n)$

3. d. En déduire que la suite $(d_n)_{n > 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n , $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n , $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

4. b. En déduire que, pour tout entier naturel n , le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n .

4. c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

4. d. Justifier cette construction.

Exercice 4. Spécialité 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.

Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

• Exemple :

– M correspond à $x = 12$

– $7 \times 12 + 5 = 89$

– Or $89 \equiv 11 \pmod{26}$ et 11 correspond à la lettre L,

– donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.

2. a. Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x \pmod{26}$ alors $15k \equiv x \pmod{26}$.

2. b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

2. c. En déduire que $y \equiv 7x + 5 \pmod{26}$ équivaut à $x \equiv 15y + 3 \pmod{26}$.

3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = 7a_n + 5 \text{ et } b_{n+1} = 15b_n + 3$$

Montrer que pour tout entier naturel n , $a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n , $b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right) \times 15^n - \frac{3}{14}$

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

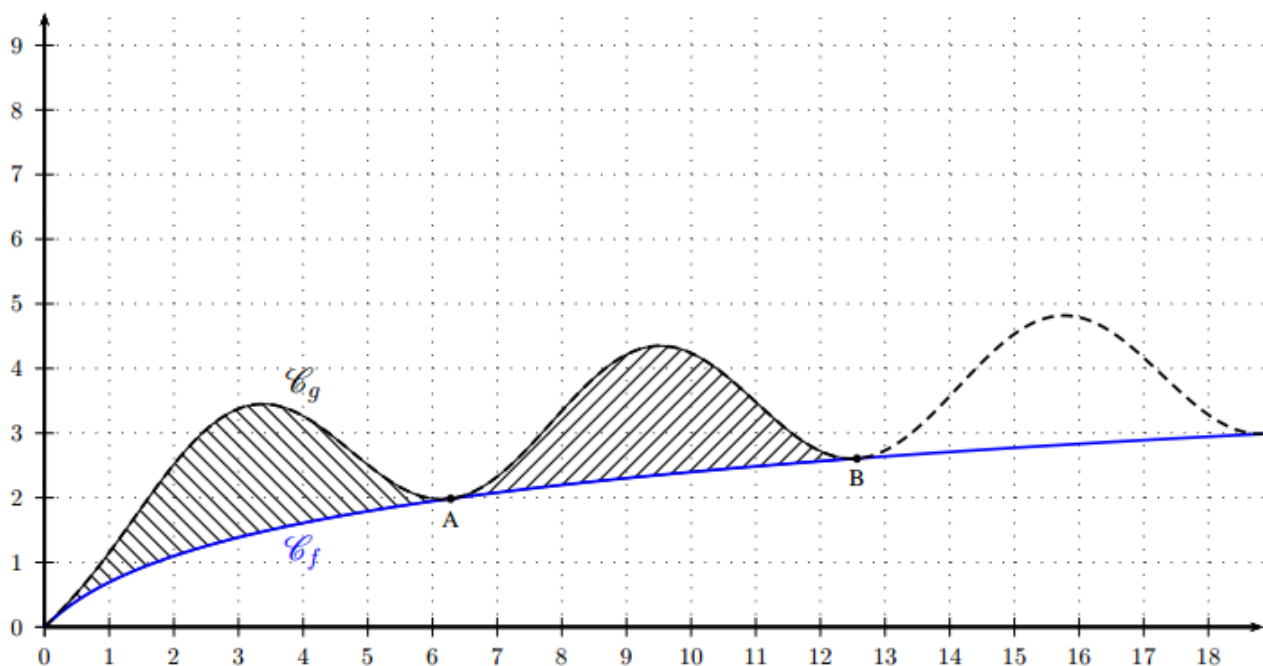
• Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.

Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.

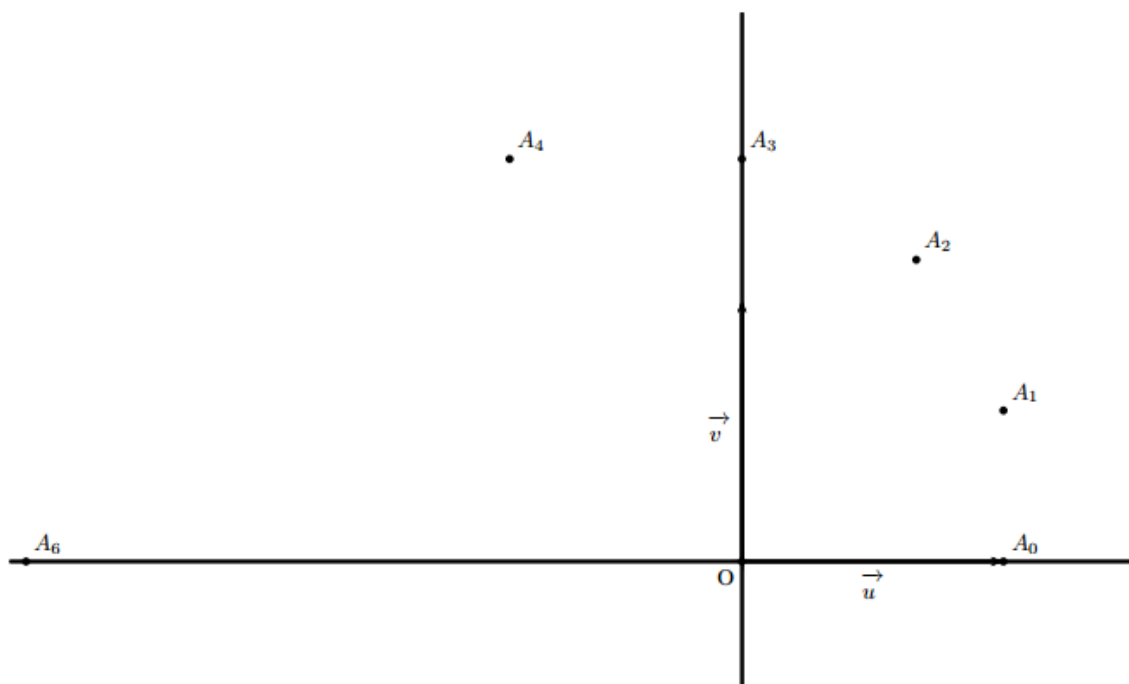
ANNEXE

ANNEXE 1 de l'exercice 2



À RENDRE AVEC LA COPIE

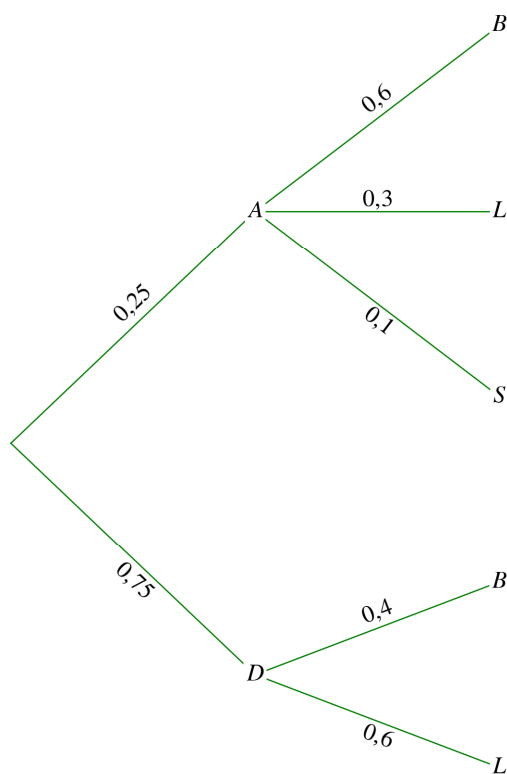
ANNEXE 2 de l'exercice 4



CORRECTION

Exercice 1. 6 points Commun à tous les candidats

Partie A



$$1. a. \quad p(A \cap L) = 0,25 \times 0,3 = \frac{3}{40}$$

$$1. b. \quad p(L) = p(A \cap L) + p(D \cap L) = 0,25 \times 0,3 + 0,75 \times 0,6 = 0,525$$

$$p(L) = \frac{21}{40}.$$

$$1. c. \quad p_L(D) = \frac{p(D \cap L)}{p(L)} = \frac{0,75 \times 0,6}{0,525} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{21}{40}} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

2. Les seules médailles représentant le château de Saumur sont argentées donc la probabilité que la médaille tirée soit argentée sachant qu'elle représente le château de Saumur est de 1.

Partie B

1. La probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 soit conforme est $p(9,9 \leq C \leq 10,1) \approx 0,904$ donc la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme est égale à $1 - p(C) \approx 0,096$

2. a. Z suit une loi normale centrée réduite

2. b. La probabilité qu'une médaille produite par la machine M_2 soit conforme est égale à $1 - 0,06 = 0,94$ donc

$$p(9,9 \leq C \leq 10,1) = p\left(\frac{9,9 - 10}{\sigma} \leq Z \leq \frac{10,1 - 10}{\sigma}\right) = 0,94 \text{ soit } p\left(\frac{-0,1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,94$$

$$\frac{0,1}{\sigma} = 1,88 \text{ soit } \frac{0,1}{1,88} = \sigma \text{ soit } \sigma \approx 0,053$$

Exercice 2. 3 points Commun à tous les candidats

Pour tout x de $[0 ; 16]$ $g(x) - f(x) = 1 - \cos x \geq 0$ donc C_f est en dessous de C_g .

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ où k est un entier tel que $0 \leq 2k\pi \leq 16$ soit $0 \leq k \leq 2$

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0 ; 16]$ sont $0, 2\pi$ et 4π .

$$\text{La première aire hachurée est égale à } \int_0^{2\pi} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x) dx = [x - \sin x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\text{La seconde hachurée est égale à } \int_{2\pi}^{4\pi} (g(x) - f(x)) dx = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos x) dx = [x - \sin x]_{2\pi}^{4\pi} = 2\pi = 2\pi$$

Les deux aires hachurées sont égales.

Exercice 3. 6 points Commun à tous les candidats

1. Le point A (1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si $\frac{1}{4} m^2 x_A + (m-1) y_A + \frac{1}{2} m z_A - 3 = 0$

soit $\frac{1}{4} m^2 + m - 1 + \frac{1}{2} m - 3 = 0$ donc $m^2 + 6m - 16 = 0$ soit $m = -8$ ou $m = 2$. A appartient aux plans P_{-8} et P_2 .

2. Les plans P_1 et P_{-4} ne sont pas parallèles (les coefficients de $x ; y ; z$ ne sont pas proportionnels) donc ils sont sécants suivant une droite (d)

P_1 a pour équation $\frac{1}{4} x + \frac{1}{2} z - 3 = 0$ soit $x + 2z - 12 = 0$

P_{-4} a pour équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$

Soit $M(x ; y ; z)$ un point de l'intersection des plans P_1 et P_{-4} , en posant $z = t$ alors $x + 2t - 12 = 0$ et $4x - 5y - 2t - 3 = 0$ soit $x = -2t + 12$

en remplaçant : $-8t + 48 - 5y - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow -10t + 45 - 5y = 0$ donc $5y = 5(-2t + 9)$ donc $y = -2t + 9$

Les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique : (d) $\begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

3. a. P_0 a pour équation : $-y - 3 = 0$ soit $y = -3$

Un point de (d) a pour coordonnées $(12 - 2t ; 9 - 2t ; t)$

Le point de (d) d'ordonnée 3 correspond au paramètre t tel que $9 - 2t = -3$ soit $t = 6$

Il s'agit donc du point B (0 ; -3 ; 6). L'intersection entre P_0 et (d) est le point B.

3. b. Soit m un réel quelconque, P_m a pour équation $\frac{1}{4} m^2 x + (m-1) y + \frac{1}{2} m z - 3 = 0$

$\frac{1}{4} m^2 x_B + (m-1) y_B + \frac{1}{2} m z_B - 3 = (m-1) \times (-3) + \frac{1}{2} m \times 6 - 3 = -3m + 3 + 3m - 3 = 0$

Pour tout réel m , le point B appartient au plan P_m .

3. c. S'il existait un point B' autre que B appartenant à P_m pour tout m , alors B' appartiendrait aussi à P_1 et P_{-4} donc à (d) et aussi à P_0 donc à l'intersection entre P_0 et (d) or l'intersection entre P_0 et (d) est le point B, donc B' n'existe pas.

Le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m .

4. a. Un vecteur normal à P_1 est $\vec{n}_1 (1 ; 0 ; 2)$, un vecteur normal à P_{-4} est $\vec{n}_{-4} (4 ; -5 ; -2)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{-4} = 1 \times 4 + 0 \times (-5) + 2 \times (-2) = 0$ donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_{-4}$ sont orthogonaux donc P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

4. b. Un vecteur normal à P_m est $\vec{n} \left(\frac{m^2}{4} ; m-1 ; \frac{1}{2} m \right)$, un vecteur normal à $P_{m'}$ est $\vec{n'} \left(\frac{m'^2}{4} ; m'-1 ; \frac{1}{2} m' \right)$

les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ soit $\left(\frac{m m'}{4} \right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0$

4. c. $\left(\frac{m m'}{4} \right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0 \Leftrightarrow (m m')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4 m m' = 0$

Cet algorithme détermine par balayages successifs, les différentes valeurs de m et m' telles que $\left(\frac{m m'}{4} \right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0$

donc telles que les plans P_m et $P_{m'}$ soient perpendiculaires.

4. d. Les nombres m et m' jouant des rôles symétriques, si $(m ; m')$ est solution alors $(m' ; m)$ est aussi solution donc les autres couples seront (1 ; -4), (1 ; 0) et (-4 ; 5).

Les six couples seront affichés dans cet ordre : (-4 ; 1) ; (-4 ; 5) ; (0 ; 1) ; (1 ; -4) ; (1 ; 0) ; (5 ; -4)

Exercice 4. 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$1. a. \quad \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 1 + i \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1. b. \quad z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$2. a. \quad \text{Montrons par récurrence que pour tout entier naturel } n, z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}}.$$

Initialisation : si $n = 0$ alors $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^0 e^{i 0} = 1 = z_0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Hérédité : Montrons pour tout entier n que si $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}}$ alors $z_{n+1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}$.

$$z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) z_n = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} z_n = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}}.$$

$$z_{n+1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} e^{i n \frac{\pi}{6} + i \frac{\pi}{6}} \text{ donc } z_{n+1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}. \text{ La propriété est héréditaire}$$

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n , $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}}$.

2. b. Les points O d'affixe 0, et A_0 d'affixe $z_0 = 1$ sont situés sur l'axe des réels ; donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si le point A_n est sur l'axe des réels, soit si $\arg z_n = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) or un argument de z_n est $n \frac{\pi}{6}$

Il faut et il suffit donc que $n \frac{\pi}{6} = k\pi$ donc que $n = 6k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

3. a. d_n est la distance $A_{n+1} A_n$

$$3. b. \quad d_0 = |z_1 - z_0| = \left| \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) z_0 - z_0 \right| = \left| i \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3. c. \quad \text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) z_{n+1} - \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) z_n = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) (z_{n+1} - z_n)$$

$$3. d. \quad d_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| \text{ et } d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left| \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) (z_{n+1} - z_n) \right| = \left| 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right| |z_{n+1} - z_n|$$

$$1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ donc } \left| 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ donc } d_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n$$

La suite $(d_n)_{n>0}$ est géométrique de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$, de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ donc pour tout entier naturel n , $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n$

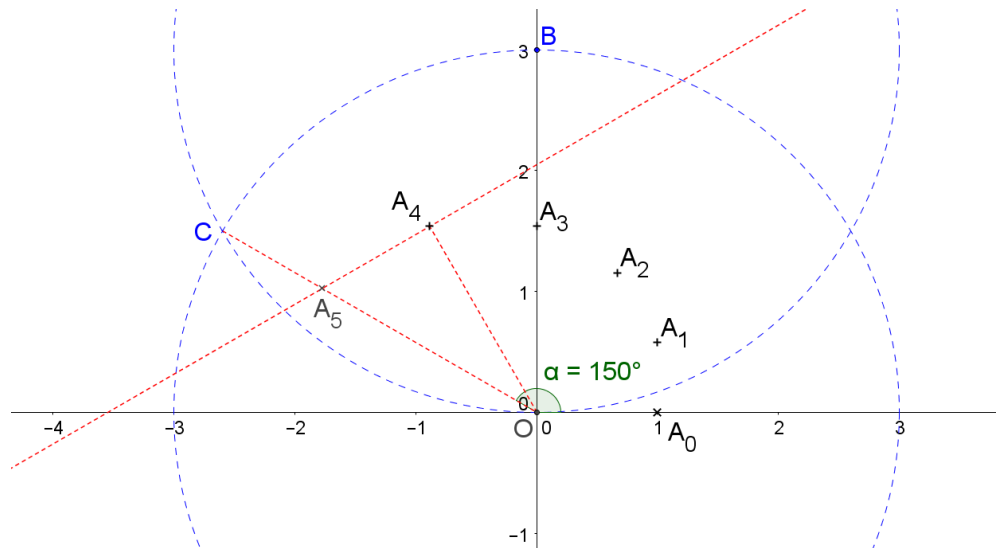
$$4. a. \quad z_{n+1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}} \text{ donc } |z_{n+1}| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \text{ et } |z_n| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \text{ soit } |z_{n+1}|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n+2} \text{ et } |z_n|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n}$$

$$d_n^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n} \text{ donc } |z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n} = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n} \text{ or } \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{donc } |z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n+2} \text{ soit pour tout entier naturel } n, |z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

4. b. $OA_n = |z_n|$ et $OA_{n+1} = |z_{n+1}|$ donc $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_n A_{n+1}^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, pour tout entier naturel n , le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n .

4. c.



4. d. Le triangle $OA_4 A_5$ est rectangle en A_4 donc A_5 appartient à la droite Δ perpendiculaire en A_4 à la droite (OA_4)

un argument de z_5 est $\frac{5\pi}{6}$ donc il suffit de représenter un angle $(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_5})$ de mesure $\frac{5\pi}{6}$ pour cela il suffit de tracer un cercle de centre O de rayon quelconque qui coupe l'axe des imaginaires en B puis de tracer le cercle de centre B passant par O qui recoupe le premier cercle en deux points, l'un d'eux est C tel que $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{3}$ donc tel que $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3}$, alors

$$(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

A_5 est l'intersection de la droite Δ et du segment $[OC]$.

Exercice 4. Spécialité 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. – L correspond à $x = 11$
– $7 \times 11 + 5 = 82$
– Or $82 \equiv 4 \pmod{26}$ et 4 correspond à la lettre E donc la lettre L est codée par la lettre E.
2. a. Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x \pmod{26}$ alors $15k \equiv x \pmod{26}$.
Si $k \equiv 7x \pmod{26}$ alors $15k \equiv 15 \times 7x \pmod{26}$, or $15 \times 7 = 105 = 26 \times 4 + 1$ donc $105 \equiv 1 \pmod{26}$ donc $15k \equiv x \pmod{26}$.
2. b. $15k \equiv x \pmod{26}$ donc $15 \times 7k \equiv 7x \pmod{26}$ or $15 \times 7 \equiv 1 \pmod{26}$ donc $k \equiv 7x \pmod{26}$
donc on a l'équivalence : $k \equiv 7x \pmod{26} \Leftrightarrow 15k \equiv x \pmod{26}$.
2. c. $y \equiv 7x + 5 \pmod{26} \Leftrightarrow 7x \equiv y - 5 \pmod{26} \Leftrightarrow x \equiv 15(y - 5) \pmod{26} \Leftrightarrow x \equiv 15y - 75 \pmod{26}$
 $75 = 3 \times 26 - 3$ donc $75 \equiv -3 \pmod{26}$
 $y \equiv 7x + 5 \pmod{26} \Leftrightarrow x \equiv 15y - 75 \pmod{26} \Leftrightarrow x \equiv 15y + 3 \pmod{26}$
3. décoder F consiste à trouver x tel que $y \equiv 7x + 5 \pmod{26}$
D'après l'équivalence précédente : $x \equiv 15y + 3 \pmod{26}$
F correspond à $y = 5$, donc en remplaçant y par 5 : $x \equiv 78 \pmod{26}$ or $78 = 3 \times 26$ donc $x \equiv 0 \pmod{26}$
 $0 \leq x \leq 25$ donc $x = 0$, F est décodé par A.

Partie B

Initialisation : si $n = 0$ alors $\left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^0 - \frac{5}{6} = a_0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Hérédité : Montrons pour tout entier n que si $a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$ alors $a_{n+1} = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^{n+1} - \frac{5}{6}$.

$$a_{n+1} = 7a_n + 5 = 7 \left[\left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6} \right] + 5$$

$$a_{n+1} = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^{n+1} - 7 \times \frac{5}{6} + 5 \text{ or } 5 - 7 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \text{ donc } a_{n+1} = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^{n+1} - \frac{5}{6}$$

La propriété est héréditaire

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n , $a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$.

Partie C

Q est en quatrième position dans IYYQ donc a été obtenu en appliquant « 6 » fois le chiffrement à une lettre inconnue, il faut décoder « 6 » fois de suite d'abord Q puis les différentes lettres obtenues.

Lettre codée	y	$15y + 3$	x	Lettre décodée
Q	16	243	9	J
J	9	138	8	I
I	8	123	19	T
T	19	288	2	C
C	2	33	7	H
H	7	108	4	E

Q est décodée en E

Pas demandé :

Lettre codée	y	$15y + 3$	x	Lettre décodée
I	8	123	19	T
T	19	288	2	C

Lettre codée	y	$15y + 3$	x	Lettre décodée
Y	24	363	25	Z
Z	25	378	14	O

Lettre codée	y	$15y + 3$	x	Lettre décodée
Y	24	363	25	Z
Z	25	378	14	O
O	14	213	5	F
F	5	78	0	A
A	0	3	3	D

IYYQ est donc décodé en CODE