

Amérique du Nord mai 2008

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt$ et $y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$

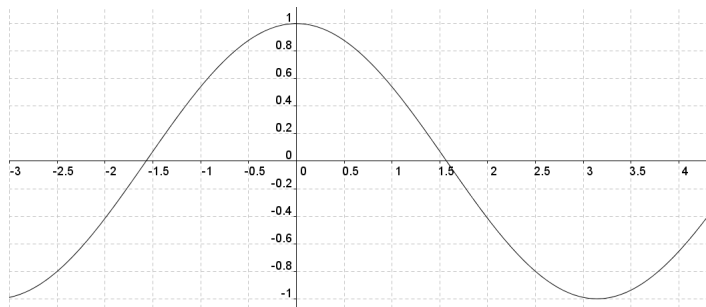
1. **a.** Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
- b.** Étudier les variations de la suite (x_n) .
- c.** Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- b.** En déduire la limite de la suite (x_n) .
3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
- b.** En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n + \cos(1)$.
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n y_n$.

CORRECTION

1. **a.** $\pi \geq 2$ donc $0 \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ donc sur l'intervalle $[0 ; 1]$, la fonction cosinus est positive (voir graphique ci-contre)

donc pour tout t de $[0 ; 1]$ la fonction $t \mapsto t^n \cos t$ est positive, elle est de plus continue, $0 < 1$ donc $\int_0^1 t^n \cos t \, dt \geq 0$.

La suite (x_n) est à termes positifs.



$$\mathbf{b.} \quad x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt - \int_0^1 t^n \cos t \, dt = \int_0^1 (t^{n+1} - t^n) \cos t \, dt$$

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^n (t-1) \cos t \, dt$$

Pour tout t de $[0 ; 1]$, $t^n \geq 0$ et $\cos t \geq 0$ de plus $0 \leq t \leq 1$ donc $1-t \leq 0$ donc pour tout t de $[0 ; 1]$ la fonction $t \mapsto t^n (t-1) \cos t$ est négative, elle est de plus continue, $0 < 1$ donc $\int_0^1 t^n (t-1) \cos t \, dt \leq 0$.

donc $x_{n+1} - x_n \leq 0$, la suite (x_n) est décroissante.

c. la suite (x_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente et sa limite est positive.

2. **a.** Pour tout t de $[0 ; 1]$, $t^n \geq 0$ et $0 \leq \cos t \leq 1$ donc pour tout t de $[0 ; 1]$, $0 \leq t^n \cos t \leq t^n$

Les fonctions $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto t^n \cos t$ sont continues sur $[0 ; 1]$ et $0 < 1$ donc $0 \leq \int_0^1 t^n \cos t \, dt \leq \int_0^1 t^n \, dt$

$$\text{or } \int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ donc pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } x_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\mathbf{b.} \quad 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

$$\mathbf{3. a.} \quad x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt$$

À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

$$\text{Soit } \begin{array}{ll} u'(t) = \cos t & u(t) = \sin t \\ v(t) = t^{n+1} & v'(t) = (n+1)t^n \end{array}$$

$$x_{n+1} = \left[t^{n+1} \sin t \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \sin t \, dt = \sin(1) - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t \, dt \text{ donc } x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1).$$

$$\mathbf{b.} \quad x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1) \text{ donc } x_{n+1} - \sin(1) = -(n+1)y_n$$

$$y_n = \frac{-1}{n+1} [x_{n+1} - \sin(1)] \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} [x_{n+1} - \sin(1)] = -\sin(1) \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

4. En développant : $x_{n+1} - \sin(1) = -n y_n - y_n$ donc $n y_n = -x_{n+1} - y_n + \sin(1)$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n y_n = \sin(1)$

$$y_{n+1} = (n+1)x_n + \cos(1) \text{ donc } n x_n + x_n = y_n - \cos(1) \text{ donc } n x_n = y_n - x_n - \cos(1)$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n = -\cos(1)$