Le plan est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Unité graphique : **3 cm.**

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M′ d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3+4\,\mathrm{i})\,z + 5\,\overline{z}}{6}.$$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2\,\mathrm{i}$, $z_B = 1$ et $z_C = 3\,\mathrm{i}$.

Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ images respectives de A, B, C par f .

Placer les points A, B, C, A′, B′, C′.

2. On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ (avec x et y réels).

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?

4. Soit M un point quelconque du plan et M′ son image par f . Montrer que M′ appartient à la droite (D).

5. *a.* Montrer que, pour tout nombre complexe z : $\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{z+\overline{z}}{6} + \mathrm{i}\,\dfrac{z-\overline{z}}{3}$.

En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{z_A}$ est réel.

b. En déduire que, si M′ ≠ M, les droites (OA) et (MM′) sont parallèles.

6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N′ ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)). Effectuer la construction sur la figure.

CORRECTION

1. A' a pour affixe $a' = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,z_A + 5\,\overline{z_A}}{6}$

$a' = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,(1+2\,\mathrm{i}) + 5\,(1-2\,\mathrm{i})}{6}$

$a' = 0$ donc A' = O

B' a pour affixe $b' = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,z_B + 5\,\overline{z_B}}{6}$

$b' = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i}) + 5}{6} = \dfrac{4+2\,\mathrm{i}}{3}$

$b' = \dfrac{4}{3} + \mathrm{i}\,\dfrac{2}{3}$ donc B' est le point d'affixe $\dfrac{4}{3} + \mathrm{i}\,\dfrac{2}{3}$

C' a pour affixe $c' = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,z_C + 5\,\overline{z_C}}{6}$

$c' = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,3\,\mathrm{i} + 5\,(-3\,\mathrm{i})}{6}$

$c' = \dfrac{-12-6\,\mathrm{i}}{6} = -2-\mathrm{i}$

donc C' est le point d'affixe $-2-\mathrm{i}$

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

2. $z' = \dfrac{(3+4\,\mathrm{i})\,(x+\mathrm{i}\,y) + 5\,(x-\mathrm{i}\,y)}{6}$

$z' = \dfrac{1}{6}(8\,x - 4\,y) + \mathrm{i}\,\dfrac{1}{6}(4\,x - 2\,y)$

donc $\mathrm{Re}\,(z') = \dfrac{1}{3}(4\,x - 2\,y)$ et $\mathrm{Im}\,(z') = \dfrac{1}{3}(2\,x - y)$

3. M est invariant par f si et seulement si M' = M soit

M est invariant par $f \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

M est invariant par $f \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}(4\,x - 2\,y) = x \\ \dfrac{1}{3}(2\,x - y) = y \end{cases}$

M est invariant par $f \Leftrightarrow \begin{cases} (4\,x - 2\,y) = 3\,x \\ (2\,x - y) = 3\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\,y = 0 \\ 2\,x - 4\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x$

L'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

4. Soit M' = f (M) alors M' a pour coordonnées (x' ; y') avec $x' = \frac{1}{3}(4x - 2y)$ et $y' = \frac{1}{3}(2x - y)$

donc $2y' = \frac{1}{3}(4x - 2y)$ donc $2y' = x'$ donc $y' = \frac{1}{2}x'$ donc M' appartient à la droite (D).

5. ***a.*** $\frac{z + \bar{z}}{6} + \mathrm{i}\,\frac{z - \bar{z}}{3} = \frac{z + \bar{z}}{6} + \mathrm{i}\,\frac{2z - 2\bar{z}}{6}$

$= \frac{(1+2\mathrm{i})\,z + (1-2\mathrm{i})\,\bar{z}}{6}$

or $z' - z = \frac{(3+4\mathrm{i})\,z + 5\,\bar{z}}{6} - z = \frac{(-3+4\mathrm{i})\,z + 5\,\bar{z}}{6}$

$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{(-3+4\mathrm{i})\,z + 5\,\bar{z}}{6\,(1+2\mathrm{i})} = \frac{[(-3+4\mathrm{i})\,z + 5\,\bar{z}]\,(1-2\mathrm{i})}{6\,(1+2\mathrm{i})\,(1-2\mathrm{i})}$

$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{(-3+4\mathrm{i})\,(1-2\mathrm{i})\,z + 5\,(1-2\mathrm{i})\,\bar{z}}{6\,(1+2^2)}$

$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{(-3+6\mathrm{i}+4\mathrm{i}+8)\,z + 5\,(1-2\mathrm{i})\,\bar{z}}{6\,(1+2^2)}$

$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{(5+10\mathrm{i})\,z + 5\,(1-2\mathrm{i})\,\bar{z}}{6\times 5} = \frac{(1+2\mathrm{i})\,z + (1-2\mathrm{i})\,\bar{z}}{6}$

donc $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + \mathrm{i}\,\frac{z - \bar{z}}{3}$

Si $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels alors :

$z + \bar{z} = 2x$ et $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{i}\,y$ donc $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{x}{3} + \mathrm{i}\,\frac{2\,\mathrm{i}\,y}{3}$

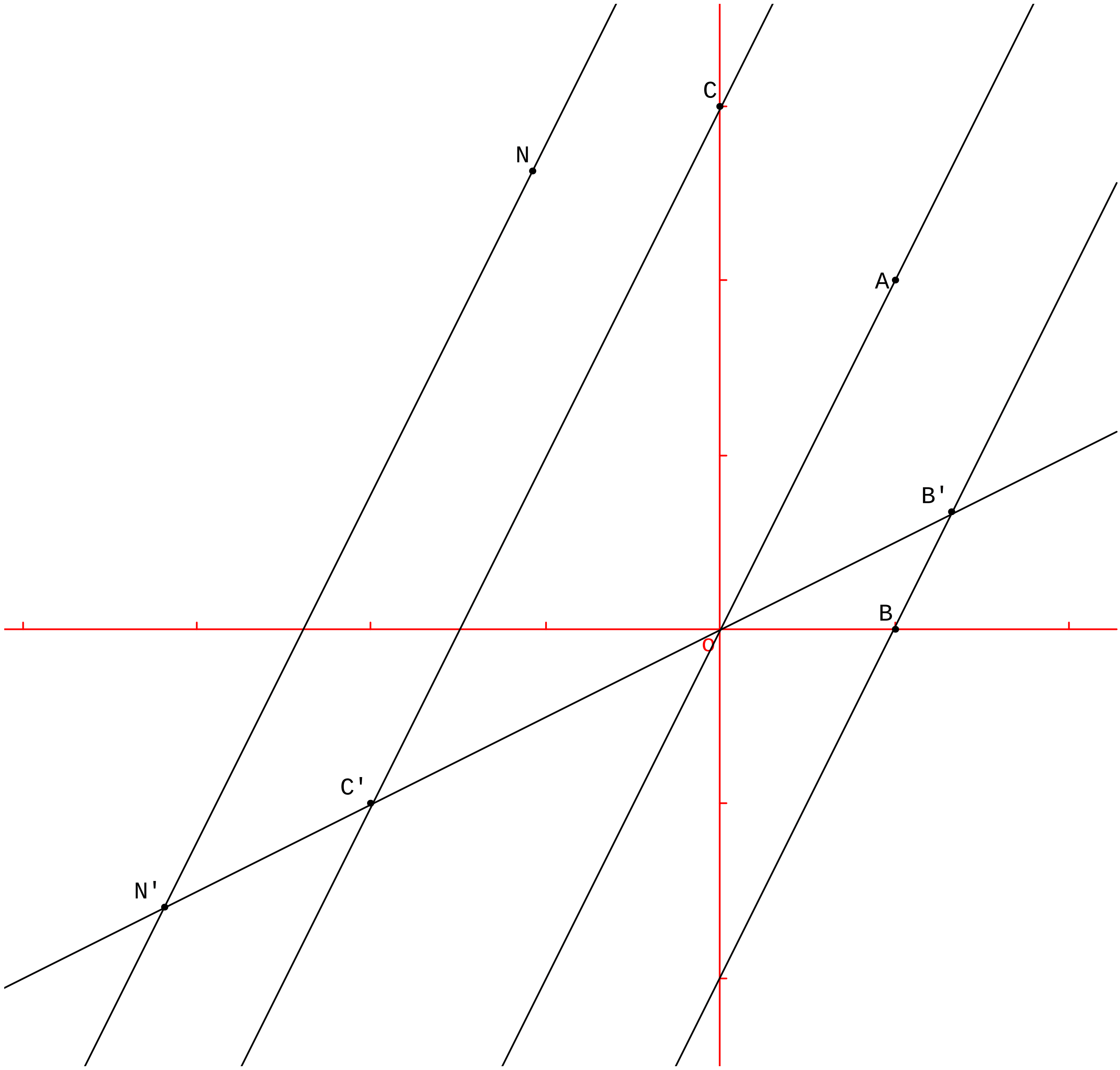
$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}$ donc le nombre $\frac{z' - z}{z_A}$ est réel.

b. Si M ≠ M' alors il existe un réel k non nul tel que $\frac{z' - z}{z_A}$ est réel. $= k$ donc $z' - z = k\,z_A$ soit $\overrightarrow{MM'} = k\,\overrightarrow{OA}$

si M′ ≠ M, les droites (OA) et (MM′) sont parallèles.

6. Si N ∈ (D) alors f (N) = N

Si N ∉ (D) alors (NN') est parallèle à (OA) et N' appartient à (D) donc N' est le point d'intersection de (D) et de la parallèle en N à (OA)


C
N
A
B'
B
O
C'
N'