

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = k(v_n - u_n)$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $u_n < u_{n+1}$.
3. Etablir que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
4. a. Soit $w_n = \sum_{p=0}^n (v_p - u_p) = (v_0 - u_0) + (v_1 - u_1) + \dots + (v_n - u_n)$. Donner l'expression de w_n en fonction de n .
4. b. Exprimer $\sum_{p=0}^{n-1} (u_{p+1} - u_p) = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})$ en fonction de w_n , puis en fonction de u_n et de u_0 .
En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. c. Quelle est la limite de (v_n) ?

CORRECTION

$$1. \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \text{ donc en remplaçant : } v_{n+1} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{u_n + v_n}{2} + v_n \right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{u_n + 3v_n}{2} \right) = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n - 2(u_n + v_n)}{4}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{4}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n) \text{ donc } k = \frac{1}{4}.$$

$$2. \quad u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2 \text{ donc } v_0 > u_0$$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n la propriété est héréditaire. C'est-à-dire que si $v_n > u_n$ alors $v_{n+1} > u_{n+1}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

or $v_n > u_n$ donc $v_n - u_n > 0$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$

donc $v_{n+1} > u_{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. Montrons que les suites sont adjacentes. Il faut montrer que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et que la limite de $v_n - u_n$ est 0.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) \text{ or pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_n - u_n > 0 \text{ donc } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) \text{ or pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_n - u_n > 0 \text{ donc } v_{n+1} - v_n < 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

Soit la suite (d_n) définie par $d_n = v_n - u_n$;

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n) \text{ donc } d_{n+1} = \frac{1}{4}d_n \text{ donc la suite } (d_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{4} \text{ de premier terme } d_0 = v_0 - u_0 = 1$$

$$\text{donc } d_n = q^n d_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$\text{si } -1 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ ici } q = \frac{1}{4} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Les trois conditions sont vérifiées donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Donc ces deux suites convergent vers la même limite L .

$$4. a. \quad w_n = (v_0 - u_0) + (v_1 - u_1) + \dots + (v_n - u_n)$$

$$w_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n \text{ or } (d_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{4}$$

$$w_n = 1 + q + \dots + q^n \text{ or } q \neq 1 \text{ donc } w_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ soit } w_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$w_n = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right).$$

$$b. \quad \text{D'après la question 3, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} (v_n - u_n)$$

$$\text{donc } (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2} (v_0 - u_0) + \frac{1}{2} (v_1 - u_1) + \dots + \frac{1}{2} (v_{n-1} - u_{n-1})$$

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2} [(v_0 - u_0) + (v_1 - u_1) + \dots + (v_{n-1} - u_{n-1})]$$

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2} w_{n-1}$$

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)$$

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)$$

or quand on écrit la somme $(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})$, on remarque que presque tous les termes se simplifient, il ne reste que $u_n - u_0$

$$\text{donc } \sum_{p=0}^{n-1} (u_{p+1} - u_p) = u_n - u_0 = u_n - 1$$

$$\text{donc } \sum_{p=0}^{n-1} (u_{p+1} - u_p) = u_n - 1 = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) \text{ donc } u_n = 1 + \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) \text{ soit } u_n = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

$$3. c. \quad \text{si } -1 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

$$\text{ici } q = \frac{1}{4} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{3}.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc elles convergent et ont la même limite donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{5}{3}.$

EXERCICE 3

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$$

- Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
- Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes ?
- Trouver deux réels distincts a_1 et a_2 tels que les suites (S_n) et (T_n) définies pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = u_n + a_1 v_n \text{ et } T_n = u_n + a_2 v_n$$

soient géométriques.

- Exprimer S_n et T_n en fonction de n .
- Déterminer les suites (u_n) et (v_n) .

CORRECTION

- $u_0 = -1$ et $v_0 = 2$ donc $v_0 > u_0$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n la propriété est héréditaire. C'est-à-dire que si $v_n > u_n$ alors : $v_{n+1} > u_{n+1}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2(u_n + 4v_n) - 5(u_n + v_n)}{10} \text{ donc } v_{n+1} - u_{n+1} = 0,3(v_n - u_n)$$

or $v_n > u_n$ donc $v_n - u_n > 0$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$ donc $v_{n+1} > u_{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

- D'après la question précédente : $v_{n+1} - u_{n+1} = 0,3(v_n - u_n)$

soit $w_n = v_n - u_n$ alors $w_{n+1} = 0,3w_n$ donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 3$ et de raison $q = 0,3$.

donc $w_n = q^n w_0 = 3 \times (0,3)^n$.

Pour montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, il faut montrer que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et que la limite de $v_n - u_n$ est 0.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) \text{ or pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_n - u_n > 0 \text{ donc } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = -\frac{1}{5}(v_n - u_n) \text{ or pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_n - u_n > 0 \text{ donc } v_{n+1} - v_n < 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

$$\text{si } -1 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ ici } q = 0,3 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0 \text{ soit } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Les trois conditions sont vérifiées donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Donc ces deux suites convergent vers la même limite L .

$$3. \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}: S_{n+1} = u_{n+1} + a v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + a \frac{u_n + 4v_n}{5} \text{ donc } S_{n+1} = \frac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10}$$

$$S_n \text{ est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel } q \text{ tel que : } S_{n+1} = q S_n \Leftrightarrow \frac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10} = q(u_n + a v_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10} = q u_n + a q v_n \text{ donc en identifiant, il suffirait que : } 2a+5 = 10q \text{ et } 8a+5 = 10aq$$

$$\text{donc } 2a^2 + 5a = 10aq = 8a+5 \text{ donc } a \text{ est solution de : } 2a^2 - 3a - 5 = 0$$

L'équation $2x^2 - 3x - 5 = 0$ admet pour solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{5}{2} = 2,5$ donc on a 2 choix possibles pour a : $a_1 = -1$ et $a_2 = 2,5$

Vérification :

Soit $S_n = u_n - v_n$ et $T_n = u_n + 2,5 v_n$. Vérifions que ces deux suites sont bien géométriques :

$$S_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4v_n}{5} = \frac{3u_n - 3v_n}{10} \text{ donc } S_{n+1} = 0,3(u_n - v_n) = 0,3 S_n$$

donc S_n est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $S_0 = u_0 - v_0 = -3$ donc $S_n = -3 \times 0,3^n$

$$T_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + 2,5 \frac{u_n + 4v_n}{5} = \frac{5u_n + 5v_n + 5u_n + 5v_n}{10} = u_n + v_n \text{ donc } T_{n+1} = T_n \text{ donc } T_n \text{ est une suite constante}$$

$$T_0 = u_0 + 2,5 v_0 = -1 + 5 = 4 \text{ donc pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}: T_n = 4$$

$$4. \quad S_n = -3 \times 0,3^n \text{ et } T_n = 4 \text{ donc il faut résoudre le système } \quad u_n - v_n = -3 \times 0,3^n \text{ et } \quad u_n + 2,5 v_n = 4$$

$$\text{en soustrayant membre à membre : } -(u_n - v_n) + u_n + 2,5 v_n = 3 \times 0,3^n + 4 \text{ donc } 3,5 v_n = 4 + 3 \times 0,3^n \text{ soit } v_n = \frac{4 + 3 \times 0,3^n}{3,5}$$

$$2,5(u_n - v_n) + u_n + 2,5 v_n = 2,5 \times 3 \times 0,3^n + 4 \text{ donc } 3,5 u_n = 7,5 \times 0,3^n + 4 \text{ donc } u_n = \frac{8 + 7,5 \times 0,3^n}{3,5}$$