

Limites de fonctions

Limites en $+\infty$

Définitions :

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Même type de définitions quand x tend vers $-\infty$.

Propriétés

Limites de fonction usuelle en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \text{ où } k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \text{ où } k \in \mathbb{N}^*.$$

Propriétés Limites de fonction usuelle en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ lorsque k est un entier naturel impair et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ lorsque k est un entier naturel pair non nul.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \text{ où } k \in \mathbb{N}^*.$$

Définitions Limites en un réel, limite à gauche, limite à droite

Soit f une fonction définie sur un voisinage de a sauf éventuellement en a .

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle du type $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle du type $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Propriétés

Limites de fonction usuelle en un réel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Pour k entier naturel impair, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^k} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^k} = +\infty$.

Pour k est un entier naturel pair, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^k} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^k} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} = +\infty$

Illustration graphique asymptotes

Graphiquement, on observe qu'une droite est asymptote à une courbe lorsque la courbe se rapproche autant qu'on le veut de la droite.

Définitions asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$)

La droite d'équation $y = \ell$ est dite droite asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$).

asymptote verticale

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) où a est un réel.

La droite d'équation $x = a$ est dite droite asymptote à la courbe représentative de f .

Propriétés Somme

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$

Dans le cas où l'une au moins des fonctions a une limite infinie en α , les résultats sont donnés par le tableau suivant :

La limite de la somme $f(x) + g(x)$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$ \ $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$
ℓ	$+\infty$	$-\infty$

Propriétés Produit

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x)) = \ell \times \ell'$

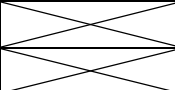
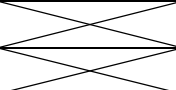
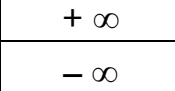
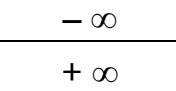
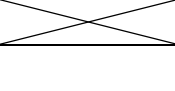
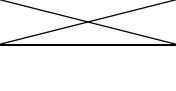
Dans le cas où l'une au moins des fonctions a une limite infinie en α , les résultats sont donnés par le tableau suivant :

La limite du produit $f(x) \times g(x)$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$ \ $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell (\ell > 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell (\ell < 0)$	$-\infty$	$+\infty$
0	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Propriété quotient

La limite du quotient

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$ \ $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	$\ell' (\ell' > 0)$	$\ell' (\ell' < 0)$
$+\infty$			$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$			$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell (\ell > 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	
$\ell (\ell < 0)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		
0	0	0			0	

Propriétés Limites et inégalités :

théorèmes de comparaison

Si $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$.

Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$.

3. Continuité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a .

On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I .

Propriétés

Les fonctions polynomiales, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, sinus, cosinus ainsi que les sommes, produits, quotients et composées de telles fonctions sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Suites et composée

Soient f une fonction définie continue sur un intervalle I , (u_n) une suite de réels appartenant à l'intervalle I de terme général $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) converge alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle un intervalle $[a ; b]$ où $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a ; b]$.

Théorème

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle un intervalle $[a ; b]$ où $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a ; b]$.

Remarque

Le théorème est vérifié dans le cas où f est définie sur un intervalle ouvert $]a ; b[$ ou semi-ouvert $[a ; b[$ ou $]a ; b]$ avec a ou b finis ou infinis.

Dans ce cas, l'énoncé des théorèmes est à adapter en considérant les limites en a ou en b au lieu des images de ces réels.

Dérivation Formulaire

fonction	fonction dérivée
$x \rightarrow a$ où a est une constante	0
x^n (où $n \in \mathbb{Z}$)	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$ (ou $n \geq 0$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I .

	fonction	fonction dérivée
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit par un réel	$k u$ où k est une constante réelle	$k u'$
Produit	$u v$	$u' v + v' u$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' v - u v'}{v^2}$

Soit u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

fonction g	fonction dérivée de g	Remarques éventuelles
u^2	$2 u u'$	
u^n (où $n \in \mathbb{Z}$)	$n u^{n-1} u'$	u ne s'annule pas sur I si $n < 0$
$\frac{1}{u^n}$ (ou $n \geq 0$)	$-\frac{n u'}{u^{n+1}}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	u est strictement positive sur I

Dans le cas général, si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J tel que pour tout x de I , $u(x)$ appartient à J alors la fonction g définie par $g(x) = f[u(x)]$ est dérivable sur I et pour tout x de I ,

$$g'(x) = u'(x) \times f'[u(x)]$$

Définition Tangente à une courbe en un point

La **tangente** à C au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Théorème L'équation réduite de la tangente T à C au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$