Centres étrangers juin 2005

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a ; b)$ vérifiant la relation (E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501 ; b)$.

3. On suppose que le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k ; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3. Cette écriture est-elle unique ?

CORRECTION

Partie A

1. $N = (a + b)(a - b)$.

Si a et b ont la même parité, alors $a + b$ est pair et donc N est pair ce qui exclu donc a et b n'ont pas la même parité.

2. On a par définition de N, $a > b$. Or $N = (a + b)(a - b)$, donc est le produit de deux entiers naturels.

En posant $a + b = p$ et $a - b = q$, $N = p \times q$. D'après la question 1, a et b sont de parités contraires, donc $a + b = p$ et $a - b = q$ sont impairs et leur produit aussi.

Partie B

1. *a.* Les restes de X sont les naturels de 0 à 8. On calcule les restes de X^2 :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1

b. On a $250\,507 = 9 \times 27\,834 + 1$, donc $250\,507 \equiv 1$ modulo 9 donc $a^2 - 250\,507 \equiv a^2 - 1$ modulo 9

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a^2 - 1$	8	0	3	8	6	6	8	3	0

$a^2 - 250\,507 = b^2$, donc $a^2 - 1 \equiv b^2$ modulo 9

D'après la question précédente les restes modulo 9 de b^2 sont ou 0, ou 1, ou 4 ou 7. On ne peut pas avoir les restes modulo 9 de $a^2 - 1$ égaux à 1 ; 4 ou 7 donc $a^2 - 1 \equiv 0$ modulo 9. Donc le reste modulo 9 de a^2 est égal à 1.

En lisant le tableau de la question 1. *a.*, on en déduit que les restes possibles de a sont 1 ou 8.

2. *a.* Si $(a ; b)$ vérifie l'équation $a^2 - 250\,507 = b^2$, alors $a^2 = 250\,507 + b^2$

$250\,507 \leq a^2$ donc $a \geq \sqrt{250\,507}$ or $500 < \sqrt{250\,507} < 501$ et a est un entier naturel donc $a \geq 501$.

b. $(501 ; b)$ est solution de (E) si $501^2 - 250\,507 = b^2 \Leftrightarrow 494 = b^2$ or $22^2 = 494$ et $23^2 = 529$ donc 494 n'est pas le carré d'un entier naturel. Il n'*y a* pas de couple solution de la forme $(501 ; b)$.

3. *a.* $503 = 55 \times 9 + 8$ donc $503 \equiv 8$ modulo 9 ; $505 = 56 \times 9 + 1$ donc $505 \equiv 1$ modulo 9.

D'après la question précédente, a est congru à 1 ou à 8 modulo 9 donc à 503 ou à 505 modulo 9.

b. $(505 + 9k ; b)$ solution de (E) $\Leftrightarrow (505 + 9k)^2 - 250\,507 = b^2$

k	$(505 + 9k)^2 - 250\,507$	$b = \sqrt{(505 + 9k)^2 - 250\,507}$
0	4518	pas un entier
1	13689	117

Donc le couple (514 ; 117) est un couple solution.

Partie C
1. D’après la question précédente 250 507 = 5142 − 1172 = (514 + 117) (514 − 117) = 631 × 397. (Effectivement 250 507 n’est pas premier.

2. 631 n’est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 or $29^2 > 631$ donc 631 est premier :
397 n’est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 or $23^2 > 397$ donc 397 est premier.
Conclusion 631 et 397 sont premiers entre eux.

3. D’après la question précédente la seule écriture primaire de 250 507 est 631 × 397. Il n’existe pas d’autre écriture de ce nombre si ce n’est l’écriture triviale 1 × 250 507. L’écriture précédente est donc unique.