

12 – Courbes de Gauss

On a vu dans la chronique « Courbes en PsTricks » comment tracer des courbes (voir page 13); on y fera constamment référence dans cette chronique-ci.

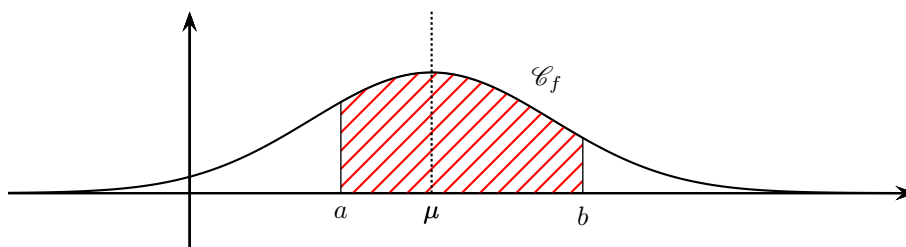
1 Notation post-fixée ou notation infixée

Dans la précédente chronique, la plupart des fonctions représentées étaient définies en notation **post-fixée**; c'est à dire qu'au lieu d'écrire $2x-3$ (notation **infixée**), on écrivait `2 x mul 3 sub`. Cette **Notation Polonaise Inverse** (NPI ou RPN en anglais) a été inventée en 1920 par JAN LUKASIEWICZ, et c'est CHARLES LEONARD HAMBLIN qui l'a popularisée dans les années 50. Mais si on exporte du code L^AT_EX depuis GeoGebra, par exemple, on obtient des représentations graphiques de fonctions écrites en notation **infixée**; et on peut constater que la commande `algebraic=true` a été ajoutée comme option dans `\psset` (voir page 18).

On va voir qu'il est parfois plus pratique d'utiliser la notation infixée que la notation post-fixée.

2 Objectif

L'objectif de cette chronique est de construire un graphique comme celui-ci où la courbe est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ avec μ réel quelconque et σ réel strictement positif.



3 La courbe

On va représenter la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{2}\right)^2}$ qui est la fonction de densité d'une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 4$ et d'écart type $\sigma = 2$.

On commence par définir ce qu'il faut pour tracer la courbe en PsTricks avec `\psset`, `\pspicture`, `\psaxes`, etc., puis on définit la fonction de densité en notation infixée :

```
\def\fd{1/(2*sqrt(2*PI))*EXP(-((x-4)/2)^2/2)}
```

Enfin on demande son tracé; 1000 points pour x variant entre `\xmin` et `\xmax` qu'il faut définir avant le `\pspicture` :

```
\psplot[plotpoints=1000]{\xmin}{\xmax}{\fd}
```

On tracera une courbe avec des axes sur lesquels on ne mettra pas de graduation (`ticks=none`), ni de label (`labels=none`).

Ce qui donne comme code :

```
\psset{xunit=0.8cm, yunit=8cm, runit=1cm, arrowsize=3pt 3, algebraic=true}
\def\xmin {-3} \def\xmax {12} % intervalle des x
\def\ymin {-0.2} \def\ymax {0.3} % intervalle des y
\begin{pspicture*}(\xmin,\ymin)(\xmax,\ymax)
\psaxes[ticks=none, labels=none]{->}(0,0)(\xmin,-0.1)(\xmax,\ymax)
\def\f{1/(2*sqrt(2*PI))*EXP(-((x-4)/2)^2/2)}
\psplot[plotpoints=1000]{\xmin}{\xmax}{\f}
\end{pspicture*}
```

4 Amélioration

Ce serait pratique de pouvoir changer la moyenne et l'écart type de façon à pouvoir rapidement tracer d'autres fonctions de densité de lois normales.

Facile... à condition d'utiliser la notation infixée car je ne suis pas arrivé à le faire avec la notation post-fixée!

Il suffit de définir la moyenne `\m` et l'écart type `\s` puis d'utiliser ces variables dans la définition de la fonction :

```
...
\def\m{4} \def\s{2} % moyenne et écart type
\def\f{1/(\s*sqrt(2*PI))*EXP(-((x-\m)/\s)^2/2)} % définition de f
\psplot[plotpoints=1000]{\xmin}{\xmax}{\f} % tracé de la fonction
...
```

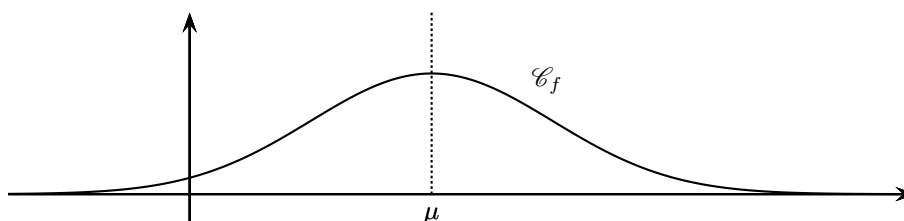
Naturellement, on ajustera en conséquence les valeurs de `\xmin`, `\xmax`, `\ymin` et `\ymax`, ainsi que celles de `xunit` et `yunit` si nécessaire.

Enfin on peut placer la lettre μ là où il faut, et tracer en pointillés la droite d'équation $x = \mu$, axe de symétrie de la courbe :

```
...
\uput[d](\m,0){$\mu$}
\psline[linestyle=dashed, dash=1pt 1pt](\m,0)(\m,\ymax)
...
```

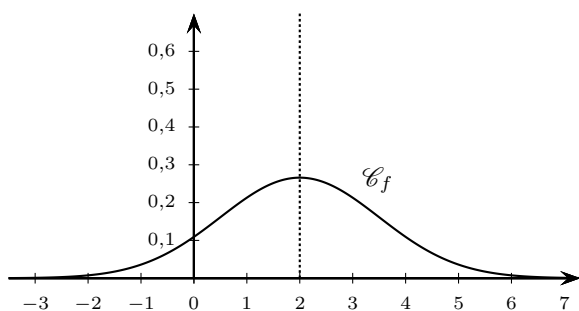
Le mode « pointillés » s'appelle `dotted` et pour tracer un trait en pointillés, il faudrait entrer comme option `linestyle=dotted`; mais j'ai trouvé que les pointillés étaient peu visibles, alors j'utilise le mode `dashed` (tirets) en rapprochant suffisamment les tirets pour qu'ils apparaissent comme des pointillés...

Ce qui donne, en plaçant le nom de la courbe au bon endroit :

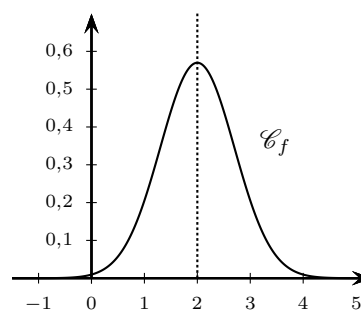


5 Influence des paramètres

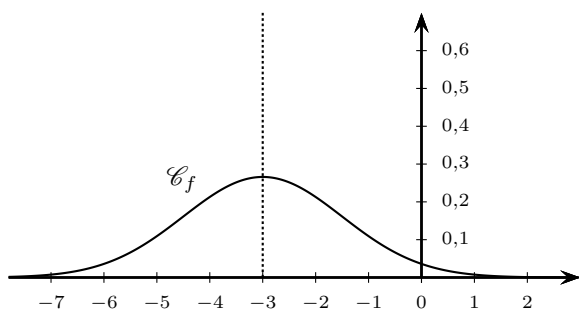
Maintenant que tout ou presque est défini, c'est très facile de montrer l'influence du couple de paramètres (moyenne, écart type) sur des tracés de courbes de Gauss :



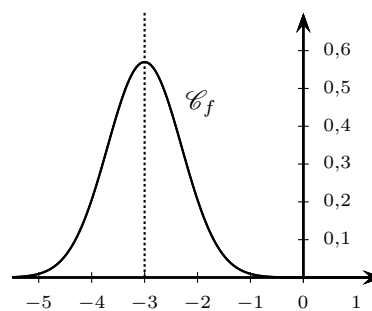
$\mu = 2$ et $\sigma = 1,5$



$\mu = 2$ et $\sigma = 0,7$



$\mu = -3$ et $\sigma = 1,5$



$\mu = -3$ et $\sigma = 0,7$

Quatre `\pspicture` et quatre minipages et le tour est joué!

Voici quand même le code de la représentation correspondant à $\mu = 2$ et $\sigma = 1,5$:

```
\psset{xunit=0.7cm, yunit=5cm, runit=1cm, arrowsize=3pt 3, algebraic=true}
\def\xmin {-3.5} \def\xmax {7.3}
\def\ymin {-0.1} \def\ymax {0.7}
\begin{pspicture*}(\xmin,\ymin)(\xmax,\ymax)
\psaxes[labelFontSize=\scriptstyle, ticksize=-2pt 2pt, Dy=0.1, comma]%
{->}(0,0)(\xmin,0)(\xmax,\ymax)
\def\m{2} \def\s{1.5} % moyenne et écart type
\def\ff{1/(\s*sqrt(2*PI))*EXP(-((x-\m)/\s)^2/2)}
\psplot[plotpoints=1000]{\xmin}{\xmax}{\ff}
\psline[linestyle=dashed,dash=1pt 1pt](\m,0)(\m,\ymax) % axe de symétrie
\uput[ur](3,0.2){$\Cr f$}
\end{pspicture*}
```

Dans `\psaxes`, on voit pour options :

- `labelFontSize=\scriptstyle` qui permet d'écrire les labels en plus petit ;
- `Dy=0.1` qui gradue les ordonnées par dixième (par défaut `Dx=1` donc on peut ne pas le mettre) ;
- `comma` qui permet d'afficher la virgule comme séparateur décimal dans les labels à la place du point.

Mais il y a une particularité intéressante dans les deux courbes du bas : les labels en ordonnée sont situés à droite de l'axe.

J'ai mis un moment à trouver comment faire!

Je me suis plongé dans la documentation de `pstricks` et j'ai découvert la variable `labelsep` qui gère l'espacement entre l'axe et le label; sa valeur par défaut est 0,5 pt. J'ai donc essayé, pour écrire les labels de l'autre côté de l'axe, d'entrer une valeur négative pour `labelsep`. Mais hélas, un `labelsep=-20pt`, place de l'autre côté de l'axe à la fois les labels en ordonnée et... ceux en abscisse.

Ce qui n'était pas envisageable!

La solution?

J'ai essayé de voir si, par hasard, la variable `ylabelsep` n'existait pas, et si on ne pouvait pas la modifier, et j'ai obtenu exactement ce que je souhaitais!!!

Il faut donc rajouter comme option dans `\psaxes` : `ylabelsep=-20pt`
et les labels seront sur le côté droit de l'axe des ordonnées.

6 Domaine sous la courbe

On veut maintenant hachurer le domaine compris entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, la courbe et l'axe des abscisses.

J'ai d'abord commencé par des `\psline` comme il est décrit à cette adresse :

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?article134&debut_page=2#sommaire_1

Cette méthode utilise `\pscustom` mais nécessite de connaître $f(a)$ et $f(b)$, ce qui oblige à les calculer avant.

Il y a mieux en remplaçant les `\psline` par des `\lineto`, sans oublier de terminer la commande par un `\closepath` qui « ferme le chemin »; voilà le code complet, dans lequel on voit qu'on va hachurer en rouge le domaine sous la courbe (options de `\pscustom`) :

```
\psset{xunit=0.8cm, yunit=8cm, runit=1cm, arrowsize=3pt 3, algebraic=true}
\def\xmin {-3} \def\xmax {12}
\def\ymin {-0.2} \def\ymax {0.3}
\begin{pspicture*}(\xmin,\ymin)(\xmax,\ymax)
\psaxes[labelFontSize=\small, ticksize=-0pt 0pt, Dx=1, Dy=0.1, labels=none]%
{->}(0,0)(\xmin,-0.1)(\xmax,\ymax)
\def\m{4} \def\s{2} % moyenne et écart type
\def\f{1/(\s*sqrt(2*PI))*EXP(-((x-\m)/\s)^2)/2} % définition de la fonction
\psplot[plotpoints=1000]{\xmin}{\xmax}{\f} % tracé de la fonction

\def\inf{2.5} \def\sup{6.5} % définit a et b
\pscustom[fillstyle=hlines, linestyle=solid, linewidth=0.5pt, hatchcolor=red]
{
\psplot{\inf}{\sup}{\f} % courbe de f sur [inf , sup]
\lineto(\sup,0)\lineto(\inf,0) % trace les segments
\closepath % indispensable pour fermer le chemin
}

\uput[d](\m,0){$\mu$} \psline[linestyle=dashed, dash=1pt 1pt](\m,0)(\m,\ymax)
\uput[ur](5.5,0.15){$\Cr f$}
\uput[d](4,0){$\mu$}
\uput[d](\inf,0){$a$} \uput[d](\sup,0){$b$}
\end{pspicture*}
```

L'utilisation de `\pscustom` est décrite dans le mode d'emploi de `pstricks` qui a été traduit et mis en ligne sur le site de l'APMEP :

<http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/TraductionfinalePSTricks.pdf>

Merci à la personne qui a traduit ce mode d'emploi.