Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O; u, v) (unité graphique: 4cm). On note A, B et C les points d'affixes respectives 2 i, – 1 et i. On considère l'application f qui, à tout point M diffèrent de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z+1}{z-2\,\mathrm{i}}$.

1.*a*. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Déterminer l'affixe du point C', image de C par f. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?

c. Montrer que le point C admet un unique antécédent par f, que l'on appellera C". Quelle est la nature du triangle BCC" ?

2. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z' (lorsque celui-ci existe).

3. Déterminer en utilisant la question précédente, les ensembles suivants :

a. l'ensemble E_0 des point M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif;

b. l'ensemble E_1 des point M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul;

c. l'ensemble E_2 des points M dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

CORRECTION

1. *b*. Le point C', image de C par f a pour affixe $c' = \dfrac{c+1}{c-2\,\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-2\,\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}+1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}\,(1+\mathrm{i}) = -1+\mathrm{i}$

$\overrightarrow{AC}$ a pour affixe – i ; $\overrightarrow{C'B}$ a pour affixe $-1-(-1+\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'B}$ donc le quadrilatère ACBC' est un parallélogramme.

c. C" est l'antécédent de c si et seulement si son affixe c'' vérifie : $\dfrac{c''+1}{c''-2\,\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ soit $c''+1 = \mathrm{i}\,(c''-2\,\mathrm{i}) \Leftrightarrow c''+1 = \mathrm{i}\,c''+2$

$c''(1-\mathrm{i}) = 2-1$ soit $c'' = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ donc le point C admet un unique antécédent par f.

$BC^2 = |c-b|^2 = |1+\mathrm{i}|^2 = 2$

$CC''^2 = |c''-c|^2 = \left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}-\mathrm{i}\right|^2 = \left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right|^2 = \dfrac{1}{2}$

$BC''^2 = |c''-b|^2 = \left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}+1\right|^2 = \left|\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right|^2 = \dfrac{5}{2}$ donc $BC''^2 = CC''^2 + BC^2$

Le triangle BCC" est rectangle en C.

2. si $z \neq 2\,\mathrm{i}$, $|z'| = \left|\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right| = \dfrac{|z-z_B|}{|z-z_A|} = \dfrac{MB}{MA}$

si $z \neq -1$ alors $z' \neq 0$ et $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)$ donc $\arg(z') = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. *a*. z' est un réel strictement négatif $\Leftrightarrow \arg(z') = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ M ≠ A et M ≠ B et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ M ≠ A et M ≠ B et les vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires de sens opposés

$\Leftrightarrow$ M décrit le segment [AB] privé de A et B

$E_0 = [AB] - \{A ; B\}$

b. z' est un nombre imaginaire pur non nul

$\Leftrightarrow \arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow$ M ≠ A et M ≠ B et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow$ M ≠ A et M ≠ B et les vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow$ M ≠ A et M ≠ B et le triangle MAB est rectangle en M

$\Leftrightarrow$ M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

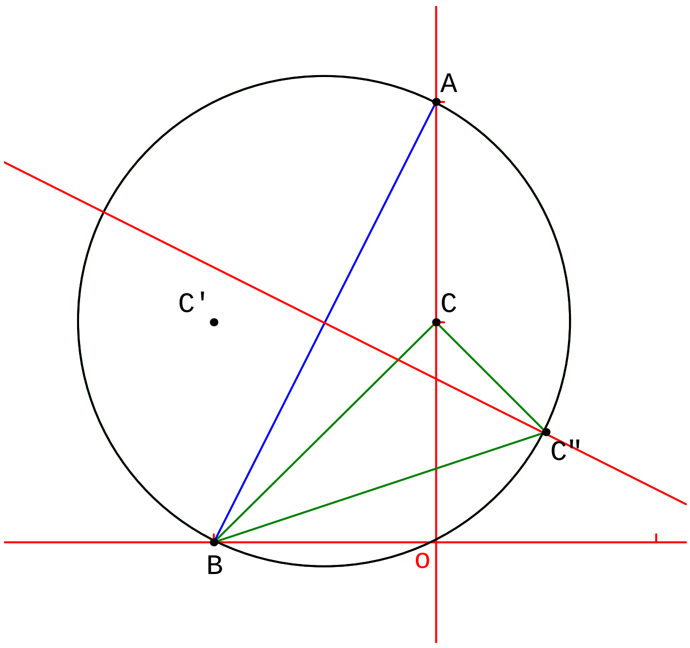
E_1 est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

c. M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1

$\Leftrightarrow OM' = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MA} = 1$ et M ≠ A

$\Leftrightarrow$ MB = MA et M ≠ A $\Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice de [AB]

E_2 est la médiatrice de [AB]



Il faudrait sur la figure exclure les points A et B.