

Dans le plan orienté, ABCD est un carré de côté 1 et de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. I est le milieu du segment [AO]

- Justifier une similitude directe et une seule telle que $S(A) = O$ et $S(B) = I$
- Déterminer le rapport et l'angle de S
- Donne une écriture complexe de S dans le repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
- On note Ω le centre de S. Démontrer que les droites $(A\Omega)$ et (ΩD) sont perpendiculaires.

CORRECTION

- $A \neq B$ et $O \neq I$ donc il existe une similitude directe et une seule telle que $S(A) = O$ et $S(B) = I$

- Le carré est de côté 1 donc la diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$ donc $OI = \frac{1}{4} \sqrt{2}$

Le rapport de S est $\frac{OI}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. L'angle de la similitude est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) = \frac{5\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$

- S est une similitude directe donc a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$

A a pour affixe 0 ; B a pour affixe 1 ; D a pour affixe i et C a pour affixe $1 + i$

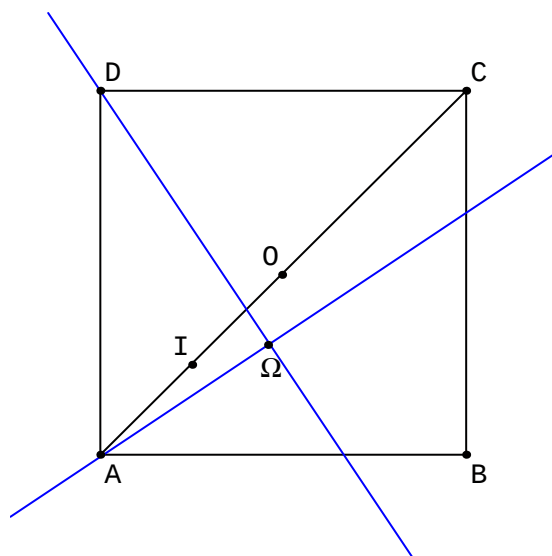
O a pour affixe $\frac{1}{2}(1 + i)$ et I a pour affixe $\frac{1}{4}(1 + i)$

$S(A) = O$ donc $\frac{1}{2}(1 + i) = a \times 0 + b$ donc $b = \frac{1}{2}(1 + i)$

$S(B) = I$ donc $\frac{1}{4}(1 + i) = a + b$ soit $a = \frac{1}{4}(1 + i) - \frac{1}{2}(1 + i)$

$a = -\frac{1}{4}(1 + i)$

S a pour écriture complexe $z' = -\frac{1}{4}(1 + i)z + \frac{1}{2}(1 + i)$



On pouvait obtenir a en tenant compte du fait que le rapport de la similitude est $|a|$ et l'angle de la similitude est $\arg(a)$

donc $a = \frac{\sqrt{2}}{4} (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{4}(1 + i)$

- Ω est le centre de la similitude donc son affixe ω est la solution de $z' = z$

donc $z = -\frac{1}{4}(1 + i)z + \frac{1}{2}(1 + i) \Leftrightarrow 4z = -(1 + i)z + 2(1 + i) \Leftrightarrow (5 + i)z = 2(1 + i) \Leftrightarrow z = 2 \frac{1 + i}{5 + i}$

$z = 2 \frac{(1 + i)(5 - i)}{(5 + i)(5 - i)}$ soit $z = \frac{6}{13} + \frac{4}{13}i$ donc $\omega = \frac{6}{13} + \frac{4}{13}i$.

$(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = \arg\left(\frac{d - \omega}{a - \omega}\right)$ ou $(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = \arg\left(\frac{\omega - d}{\omega - a}\right)$

$\omega - d = \frac{6}{13} + \frac{4}{13}i - i = \frac{6}{13} - \frac{9}{13}i = \frac{3}{13}(2 - 3i)$ et $\omega = \frac{2}{13}(3 + 2i)$

donc $\frac{\omega - d}{\omega - a} = \frac{3(2 - 3i)}{2(3 + 2i)}$ or $-i(3 + 2i) = 2 - 3i$ donc $\frac{3(2 - 3i)}{2(3 + 2i)} = -\frac{3}{2}i$ donc $\arg\left(\frac{\omega - d}{\omega - a}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ donc les droites $(A\Omega)$ et (ΩD) sont perpendiculaires.