Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera pris en compte dans l'évaluation.

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

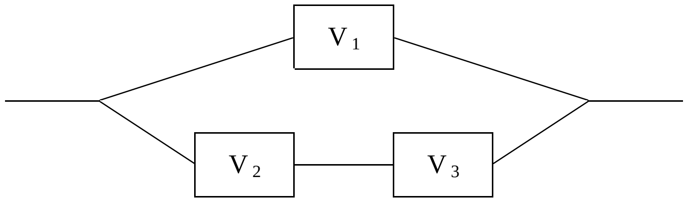
La durée de vie d'une vanne, exprimé en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6000 heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2, V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre :

Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

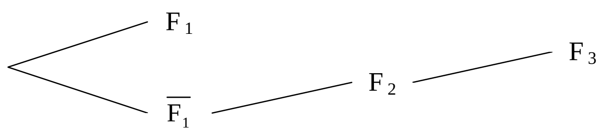


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6000 heures, on note :

- F_1 l'événement : « La vanne V_1 est en état de marche après 6000 heures » ;
- F_2 l'événement : « La vanne V_2 est en état de marche après 6000 heures »
- F_3 l'événement : « La vanne V_3 est en état de marche après 6000 heures »
- E l'événement : « le circuit est en état de marche après 6000 heures »

On admet que les événements F_1, F_2, F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité est égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.
Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que $P(E) = 0{,}363$.
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment-là. Arrondir au millième.

Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises par la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F.
2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.

Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.

Au vu de ce résultat, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 % l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale espérance $m = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leq D \leq 840)$.
2. Déterminer $P(D \leq 880)$.
3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chances d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

CORRECTION

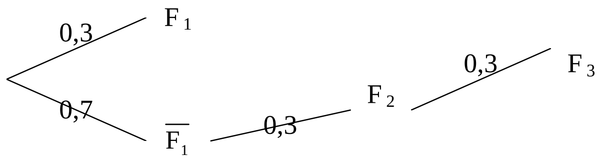
Partie A

1. La durée de vie moyenne d'une vanne est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 5\,000$ heures.

2. $P(T \geq 6000) = e^{-\lambda \times 6000} \approx 0{,}301$

Partie B

1.



2. $P(E) = P(F_1) + P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}363$.

3. $P(F_1 / E) \times P(E) = P(F_1 \cap E) = P(F_1)$ donc $P(F_1 / E) \times 0{,}301 = 0{,}3$ donc $P(F_1 / E) = \dfrac{0{,}3}{0{,}301} \approx 0{,}997$

Partie C

1. Conditions d'application : $n = 400$ donc $n \geq 30$

$n\,p = 8$ donc $n\,p \geq 5$, $n\,(1 - p) = 392$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$

$$I = \left[\ 0{,}02 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{400}}\ ;\ 0{,}02 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{400}}\ \right].$$

$I = [\ 0{,}006\ ;\ 0{,}034\ ]$

2. Dans l'échantillon, $\dfrac{10}{400} = 0{,}025$ soit 2,5 % des vannes sont défectueuses.

$0{,}025 \in I$ donc on ne peut pas remettre au seuil de 95 % l'affirmation de l'industriel.

Partie D

1. $P(760 \leq D \leq 840) = 0{,}683$
2. $P(D \leq 880) = 0{,}977$
3. La probabilité que l'industriel soit en rupture de stock (donc avoir une demande supérieure à 880 vannes) est 1 – 0,977 soit 0,023 soit 2,3 % donc l'industriel a tort.

<u>Pour information :</u> pour que la probabilité que l'industriel soit en rupture de stock soit au plus de 0,01, il faut chercher n tel que $P(D \geq n) \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq 894$ vannes.