ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE.

I : L'équation de propagation dans le vide sans charges ni courants.

1°) Mise en équations.

Dans le vide en l'absence de charges et de courants, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\boxed{\begin{cases} div(\vec{E}) = 0 & div(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}}$$

On établit (en utilisant $\underline{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{X})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{X})) - \vec{\Delta}(\vec{X})}$) que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ satisfont à l'équation de propagation ou **équation de D'Alembert vectorielle**:

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad et\ \Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}.$$

☞ En choisissant la ***condition de jauge de Lorentz*** ($\boxed{div(\vec{A}) + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0}$), on montre que les potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$ vérifient eux aussi l'équation de D'Alembert vectorielle.

➢ **Dimension et interprétation du produit $\varepsilon_0\mu_0$.**

Il découle de l'équation de propagation que la quantité $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}$ est **homogène à une vitesse**.

Cette vitesse est notée c et représente la ***vitesse de propagation*** (ou ***célérité***) du champ électromagnétique dans le vide. Retenons la relation: $\boxed{\varepsilon_0\mu_0\, c^2 = 1}$.

2°) Une solution de l'équation des ondes : l'onde plane progressive (O.P.P.).

➢ **Équation de D'Alembert à une dimension.**

Considérons la fonction scalaire $s(x,t)$ qui vérifie **l'équation des ondes à une dimension**:

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$$, où v est une constante positive.

La solution générale de l'équation des ondes à une dimension s'écrit:

$$\boxed{s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)},$$

où f et g sont des fonctions au moins de classe $\mathscr{C}^2$ à priori arbitraires .

Le groupement en $t - \dfrac{x}{v}$ dans f signifie que la grandeur f se propage sans déformation, à la **célérité** $\boldsymbol{v}$ le long de Ox, dans la direction des $\boldsymbol{x}$ **positifs** (si $v > 0$).

La fonction g de la variable $t + \dfrac{x}{v}$ a la même signification au signe près devant x et représente par conséquent une propagation sans déformation dans la direction des x négatifs.

À un instant t donné, la valeur de f est constante dans tout plan $x = Cste$.

On dit que f (ou g) décrit une **onde plane progressive** (O.P.P.) se propageant suivant Ox vers les x croissants (ou x décroissants).

La quantité $\boxed{t \mp \dfrac{x}{v}}$ représente la **phase** de l'onde à l'instant t.

➢ L'équation des ondes à trois dimensions.

L'équation de d'Alembert étant linéaire, toute superposition d'ondes planes progressives de célérité v est également solution de cette équation: c'est le cas en particulier d'une OPP se propageant dans la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{e}_u$. Notons u la coordonnée d'espace suivant cette direction. L'OPP cherchée s'écrit : $\boxed{s\left(t-\frac{u}{v}\right),\ \ avec\ u\ =\ \vec{r}.\vec{e}_u}$.

➢ Structure de l'O.P.P.

Une onde plane progressive, dans le sens défini par le vecteur unitaire $\vec{e}_u$ est caractérisée par des vecteurs champ électrique et champ magnétique qui ne dépendent que de la variable $\boxed{t-\frac{\vec{r}.\vec{e}_u}{c}}$.

> Une O.P.P. se propageant dans le vide suivant $\vec{e}_u$ vérifie :
>
> $\boxed{\vec{E}.\vec{e}_u=0}$ $\boxed{\vec{B}.\vec{e}_u=0}$ $\boxed{\vec{B}=\frac{1}{c}\vec{e}_u\wedge\vec{E}}$ ou $\boxed{\vec{E}=c\vec{B}\wedge\vec{e}_u}$.

En particulier, on remarque que: $\boxed{\left(\vec{e}_u,\vec{E},\vec{B}\right)\text{forme un trièdre direct.}}$.

> Les ondes électromagnétiques planes progressives sont des **ondes transversales** (i.e. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation).

3°) Impédance du vide.

> On montre à l'aide de l'analyse dimensionnelle que le rapport $\boxed{\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|/\mu_0}}$ est homogène à une impédance, appelée impédance d'onde.

> Pour une O.P.P. se propageant dans le vide, on établit que l'impédance d'onde (ou impédance du vide) s'écrit : $\boxed{Z_{vide}=\mu_0 c=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$ A.N. : $\boxed{Z_{vide}=377\ \Omega}$.

II : L'onde plane progressive harmonique (ou monochromatique).

1°) Définition et expression.

Une solution particulière de l'équation de propagation est l'onde plane **dépendant sinusoïdalement du temps**, appelée *Onde Plane Progressive Harmonique* (ou ***sinusoïdale***, ou ***monochromatique***), en abrégé **O.P.P.H. (ou O.P.P.M.).** Considérons une O.P.P.H. se propageant suivant l'axe $x'x$, vers les x positifs.

Le champ électrique est de la forme : $\boxed{\vec{E}=\begin{cases}E_x=0\\ E_y=E_{0y}\cos[\omega(t-x/c)+\varphi_2]\\ E_z=E_{0z}\cos[\omega(t-x/c)+\varphi_3]\end{cases}}$,

où les amplitudes E_{0y} et E_{0z} ainsi que les phases φ_2 et φ_3 sont des constantes.

Le terme en $\underline{\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi_{2,3}}$ définit ***la phase*** de l'onde plane progressive harmonique.

Une O.P.P.H. se propageant à la **célérité c** dans le sens du vecteur unitaire $\vec{e}_u$ est caractérisée par:

- sa **fréquence** (temporelle) ν ou sa **pulsation** (temporelle) $\boxed{\omega = 2\pi\nu}$.
- sa **longueur d'onde** $\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{\nu}}$ ou son **nombre d'onde** $\boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$.

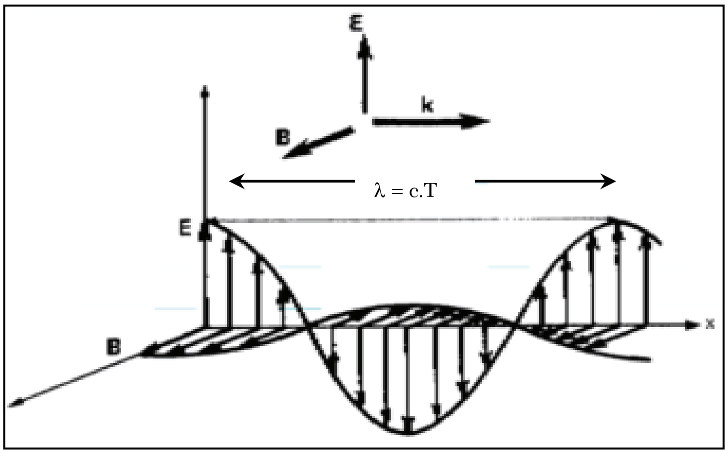
son **vecteur d'onde** $\boxed{\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_u = \frac{\omega}{c}\vec{e}_u}$.

Une O.P.P.H. présente une **double périodicité**, **temporelle** de période T et **spatiale** de période λ.

☞ Les relations établies dans le § précédent pour les O.P.P. sont bien sûr valables pour les O.P.P.H. qui n'en sont qu'un cas particulier.

Ainsi pour une O.P.P.H. :

- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont **transverses**.
- Le trièdre ($\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$) est **direct**.
- On peut écrire $\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}}$.
- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ***vibrent en phase***.



▪ **Vitesse de phase.**

Les points tels que la phase $\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi$ est **constante** définissent à chaque instant t un plan **perpendiculaire** à la direction de propagation définie par le vecteur d'onde $\vec{k}$, et appelé **plan équiphase ou plan d'onde**.

On en déduit que les plans équiphases se déplacent avec une vitesse appelée **vitesse de phase**, définie par: $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$.

Dans le vide, on a $\boxed{\omega = k.c}$; la vitesse de phase est donc **constante**, **indépendante** de la fréquence de l'onde et $\boxed{v_\varphi = c}$.

2°) Notation complexe d'une O.P.P.H.

Si on associe à toute composante réelle f du champ ou du potentiel la quantité complexe: $\boxed{\underline{f} = \underline{f_m}\exp\left[j(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)\right]}$, les opérateurs différentiels se ramènent, en coordonnées cartésiennes, aux transformations algébriques suivantes:

$\boxed{\frac{\partial X}{\partial t} \leftrightarrow -j\omega X}$, $\boxed{div\vec{X} \leftrightarrow j\vec{k}.\vec{X}}$, $\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{X} \leftrightarrow j\vec{k} \times \vec{X}}$, $\boxed{\Delta X \leftrightarrow -k^2 X}$

Relation de dispersion.

Le modèle de l'O.P.P.H. dans le vide conduit à la ***relation de dispersion*** : $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$, qui montre que le vide se comporte comme un milieu non dispersif et non absorbant (!).

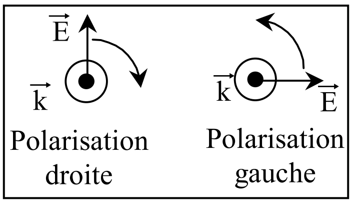
Ainsi, dans le vide, les vitesse de phase et de groupe sont identiques (= c).

3°) Polarisation d'une O.P.P.H.

La **polarisation** d'une O.P.P.H. est définie à partir de son vecteur $\vec{E}$, comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde.

Par convention, **le sens de rotation (gauche ou droite) est défini pour un observateur qui reçoit l'onde**.

Conventionnellement, le plan $(\vec{k}, \vec{E})$ est appelé le **plan d'oscillation** et le plan $(\vec{k}, \vec{B})$ le **plan de polarisation**.



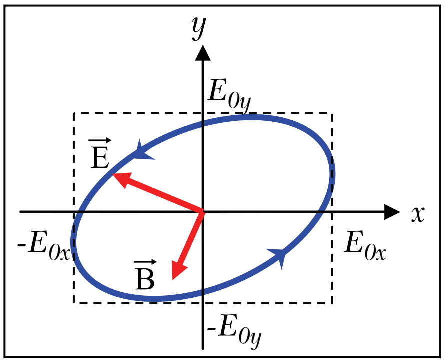
Soit une O.P.P.H. se propageant suivant l'axe $z'z$, vers les z positifs. Moyennant un choix convenable de l'origine des dates, on peut toujours écrire le champ $\vec{E}$ sous la forme :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz - \phi) \\ E_z = 0 \end{cases}.$$

Dans le plan $z = 0$, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit la courbe d'équations : $\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \phi) \end{cases}$.

En éliminant le temps entre E_x et E_y, on obtient la relation :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\phi + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2\phi\,.$$



On reconnaît l'équation d'une ellipse, le sens de parcours dépendant du signe de $\sin(\phi)$.

Ainsi, dans le cas le plus général, une O.P.P.M. est **polarisée elliptiquement**.

➢ Valeurs particulières du déphasage.

- $\boxed{Si\ \phi = 0 \text{ ou } \phi = \pi}$: $E_y / E_x =$ Cste et $\vec{E}$ **garde une direction fixe au cours du temps**.

L'O.P.P.H. est dite polarisée **rectilignement**.

- $\boxed{Si\ \phi = \pm\frac{\pi}{2} \text{ et si } E_{0x} = E_{0y}}$: $E_x^2 + E_y^2 =$ Cste; c'est **l'équation d'un cercle**.

L'O.P.P.H. est dite polarisée **circulairement** (on distingue la polarisation circulaire **gauche** et la polarisation circulaire **droite** selon la valeur de ϕ) .

➢ Importance de la polarisation rectiligne.

☞ Une O.P.P.H. de polarisation *elliptique quelconque* peut toujours s'écrire comme la superposition de deux O.P.P.H. polarisées *rectilignement* suivant *deux directions orthogonales*.

L'O.P.P.H.R forme ainsi la « brique » élémentaire de la théorie des ondes électromagnétiques.

☞ On a de même que toute O.P.P.H.R. s'écrit comme la superposition de deux O.P.P.H. polarisées *circulairement*, *droite* (O.P.P.H.C_d) et *gauche* (O.P.P.H.C_g) de *même amplitude*.

III : Étude énergétique des O.E.M. planes dans le vide.

1°) Aspect énergétique d'une O.P.P.

L'énergie électromagnétique volumique, définie par l'expression : $\varpi = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\|\vec{E}\right\|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left\|\vec{B}\right\|^2$,

s'écrit pour une O.P.P. : $\boxed{\varpi_{OPP} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2}$.

- **Le problème du calcul du vecteur de Poynting.**

> Le vecteur de Poynting n'étant **pas linéaire** vis-à-vis du champ électromagnétique, il faut le déterminer **à partir des expressions réelles** de $\vec{\mathrm{E}}$ et $\vec{\mathrm{B}}$.

Pour une O.P.P. le **vecteur de Poynting** peut s'exprimer en fonction du seul champ électrique (ou du seul champ magnétique) selon :

$\boxed{\vec{\Pi}_{OPP} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{e}_u = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{e}_u}$.ou avec l'énergie volumique ϖ : $\boxed{\vec{\Pi}_{OPP} = \varpi_{OPP}.c.\vec{e}_u}$.

- ***Complément : le vecteur de Poynting complexe.***

On définit, comme simple intermédiaire de calculs, un vecteur de Poynting complexe, sans signification physique, mais qui permet de conserver les grandeurs complexes relatives aux champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$. Ce vecteur complexe s'écrit : $\boxed{\underline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}$, où $\underline{\vec{B}}^*$ est le ***complexe conjugué*** de $\underline{\vec{B}}$.

> La moyenne temporelle du vecteur de Poynting réel s'écrit alors comme la partie réelle du vecteur de Poynting complexe : $\boxed{\left\langle \vec{\Pi}_{réel} \right\rangle = \mathcal{Re}\left(\frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*\right)}$

2°) Vitesse de propagation de l'énergie.

> On établit que l'énergie d'une O.P.P. dans le vide suivant la direction et le sens défini par $\vec{e}_u$ se propage à la célérité c.

Démonstration :

Considérons une *O.P.P.* se propageant dans le vide dans la direction de l'axe *Oz*, suivant les *z* croissants. On note v_e la vitesse de propagation de l'énergie associée à cette onde.

L'énergie qui traverse, entre les dates t et $t + dt$, une section de surface S perpendiculaire à Oz s'écrit aussi en fonction du vecteur de Poynting : $d\mathcal{E} = \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_z S.dt$.

Cette énergie a parcouru entre les dates t et $t + dt$ la distance $dz = v_e.dt$.

Une tranche d'épaisseur dz, de surface S perpendiculaire à dz contient l'énergie : $d\mathcal{E} = \varpi S dz$.

Compte tenu de la relation entre $\vec{\Pi}$ et ϖ pour une *O.P.P.*, on obtient : $\boxed{v_e = \frac{\Pi}{\varpi} = c}$.

3°) Éclairement et intensité.

Du point de vue de la réception :

> On définit **l'éclairement** E_c(t) d'une OPP à l'instant t comme l'énergie électromagnétique moyenne qui traverse par unité de temps une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation : $\boxed{\mathrm{E_c}(t) = \left\langle \left\|\vec{\Pi}(t)\right\| \right\rangle_{temp}}$. L'éclairement s'exprime en ***W.m^{-2}*** ou en ***lux*** pour les ondes lumineuses.

Du point de vue de l'émission :

On appelle **intensité énergétique** $\mathscr{I}$ d'une source dans une direction donnée, le flux rayonné par unité d'angle solide suivant cette direction : $\boxed{\mathscr{I} = \frac{d\Phi}{d\Omega}}$. ($\mathscr{I}$ est en ***W/sr*** et en ***candella*** pour une onde lumineuse).

Par ailleurs, on définit en optique ***l'intensité I d'une onde lumineuse***, proportionnelle à l'éclairement par : $\boxed{I = < \left\| \vec{E}^2 \right\| >_{temp}}$.

IV : Ouverture : Propagation guidée.

1°) Position du problème.

➢ ***Propagation dans les conducteurs.***

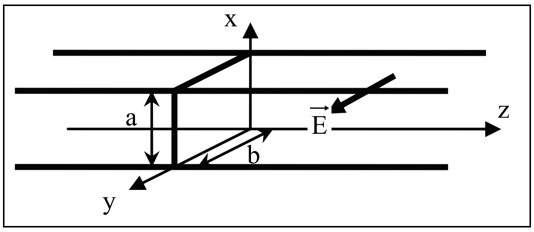
Lorsque la fréquence des O.E.M. devient supérieure au GHz (longueurs d'ondes dans l'air centimétriques), les conducteurs métalliques, coaxiaux ou non, deviennent peu utilisables pour trois raisons :

- Une OEM pénètre mal à l'intérieur d'un conducteur en hautes fréquences (cf l'effet de peau).
- Le conducteur extérieur formé de brins fins de fils tressés devient un écran imparfait et les lignes de fuite entre brins rayonnent de l'énergie ;
- Le diélectrique continu servant de support au conducteur central devient absorbant à cause des bandes de fréquence de résonance du CO_2qu'il contient presque nécessairement par fabrication.

On est donc amené à rigidifier l'enveloppe extérieure sous forme d'un tuyau métallique et à supprimer le diélectrique ainsi que le fil central qu'il supportait. On obtient ainsi un tube de section rectangulaire ou circulaire, guidant une onde électromagnétique qui se propage dans le milieu intérieur, généralement de l'air.

➢ ***Le guide d'ondes rectangulaire.***

On se propose d'étudier les caractéristiques de la propagation d'une onde électromagnétique dans un guide d'onde infini, de section droite rectangulaire réalisé par quatre plans parfaitement conducteurs, situés en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Cette géométrie du guide d'ondes fait que les ondes y sont relativement simples à décrire. De tels guides d'ondes sont très largement utilisés.



➢ ***Les conditions aux limites.***

L'onde se propage au sien du guide d'ondes dans l'air, dont les propriétés électromagnétiques sont les mêmes que celles du vide.

Les conducteurs métalliques qui limitent le guide sont supposés ***parfaits***, de sorte que le champ électromagnétique sera considéré comme ***nul à l'intérieur des parois du guide***.

L'existence d'une OEM dans le guide revient à chercher des solutions à l'équation de propagation du champ électromagnétique dans la cavité qui respectent les conditions aux limites, c'est-à-dire ici :

Écrire que la composante de la composante tangentielle de $\vec{E}$ est nulle sur les parois du métalliques du guide (continuité de $\vec{E}_T$).

Le calcul général est cependant long et fastidieux. On simplifie le problème par une série de suppositions qui conduisent à traiter un cas particulier. Puis, depuis celui-ci en supprimant progressivement chaque hypothèse restrictive, on remonte à la solution générale.

On envisage les hypothèses suivantes :

- Par analogie avec la propagation dans l'espace libre, on suppose le champ $\vec{E}$ **transversal** ($\boxed{E_z = 0}$). On verra par la suite que ce n'est pas impératif et qu'on se limite ainsi à un groupe de solutions dites **transverses-électriques** (**ondes T.E.**).
- On étudie seulement la composante de $\vec{E}$ suivant Oy ($\boxed{E_x = 0}$) : onde **polarisée rectilignement**. L'étude de celle polarisée suivant Ox conduirait évidemment à la même solution en permutant a et b. La solution générale sera la superposition des deux polarisations, avec un déphasage quelconque entre elles.
- La seule composante E_y est normale aux parois situées en $y = 0$ et $y = b$. Celles-ci n'imposent pas de conditions aux limites sur E_y : on fera la supposition la plus simple : ***E_y est indépendant de y***.
- La répartition de E_y suivant Ox impose à E_y d'être nul en $x = 0$ et $x = a$ qui rappelle l'étude du mouvement d'une corde vibrante fixée à ses extrémités et qui peut être analysée à l'aide des séries de Fourier. La répartition de $E_y(x)$ peut donc ***se développer en harmoniques d'espace*** et on limite l'étude au ***fondamental*** qui varie en $\boxed{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}$.

☞ En conséquence de quoi, on cherche le champ électrique dans le guide d'ondes sous la forme suivante : $\boxed{\vec{E} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e}_y}$.

2°) Structure de l'O.E.M. guidée.

➢ ***Relation de dispersion ; condition de propagation.***

Établir, à partir de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\vec{E}$ dans le guide d'onde, la relation de dispersion entre k et ω. A quelle condition, une onde peut se propager dans le guide ?

De $\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$, on tire : $\Delta(E_y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$. Or $\Delta(E_y) = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}$.

On en déduit la ***relation de dispersion*** : $\boxed{-\frac{\pi^2}{a^2} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0}$

L'onde se propage effectivement si ***k est réel***, soit $\boxed{k^2 > 0}$, qui impose : $\boxed{\omega > \omega_c = \frac{\pi c}{a}}$.

Un guide d'ondes se comporte donc comme un filtre passe-haut, de pulsation de coupure $\boxed{\omega_c = \frac{\pi c}{a}}$.

La vitesse de phase de l'OEM dans le guide s'écrit : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, soit ici : $\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}}$.

Curieusement, on constate que $\boxed{v_\varphi > c}$. Comme de plus, elle dépend de ω, la propagation est **dispersive**.

Commentaire :

Il n'est pas choquant d'avoir une vitesse de phase supérieure à celle de la lumière dans le vide. ***La « phase » de l'onde ne transporte pas l'information associée à l'onde***, c'est-à-dire son énergie et la théorie de la Relativité interdit seulement la propagation de toute forme d'énergie supérieure à c.

➢ **Structure du champ magnétique associé à l'O.E.M. dans le guide d'ondes.**

Pour exprimer le champ magnétique à partir du champ électrique, il est préférable d'utiliser l'équation de Maxwell-Faraday ($\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$), puis de l'intégrer par rapport au temps, que de passer par l'équation de Maxwell-Ampère, qui suppose une intégration spatiale, avec des constantes temporelles (donc fonctions de l'espace) pas toujours déterminables (conditions aux limites à connaître).

On a ici : $$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} = \begin{cases} kE_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ \dfrac{\pi}{a} E_0 \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz) \end{cases}.$$

Qui conduit à : $$\boxed{\vec{B} = \begin{cases} -\dfrac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz) \\ 0 \\ \dfrac{\pi}{\omega a} E_0 \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \end{cases}}$$ (***On prend systématiquement nulles les constantes d'intégration, car on ne s'occupe que de la propagation du champ EM***).

On peut vérifier que $\vec{B}$ est bien solution de l'équation de propagation dans le guide et que les conditions aux limites sont satisfaites (**continuité de** $\vec{B}_N$ conduisant à $B_x = 0$ en $x = 0$ et $x = a$).

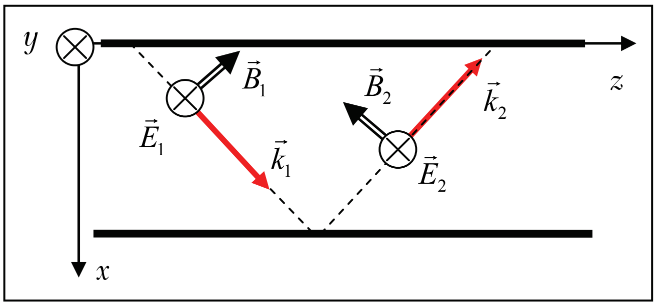
On observe que $\vec{B}$ ***n'est pas purement transverse*** dans le guide. Une onde « TE » n'est pas « TM » (transverse magnétique). **L'onde n'est pas plane**.

L'existence de la composante longitudinale B_z suivant la direction moyenne Oz de propagation s'interprète en disant que l'onde dans le guide résulte de la **superposition de deux ondes planes transverses**, chacune venant de la réflexion de l'autre sur les plans métalliques en $x = 0$ et $x = a$.

On peut réécrire $\vec{E}$ sous la forme : $$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz - \dfrac{\pi}{a}x) \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ \dfrac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz + \dfrac{\pi}{a}x) \\ 0 \end{cases},$$

qui fait apparaître les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ associés à deux O.P.P.H. polarisées rectilignement suivant Oy, de vecteurs d'ondes $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$, avec

$\boxed{\vec{k}_1 = \dfrac{\pi}{a}\vec{e}_x + k\vec{e}_z}$ et $\boxed{\vec{k}_2 = -\dfrac{\pi}{a}\vec{e}_x + k\vec{e}_z}$.



- **Énergie de l'O.E.M. dans le guide d'ondes.**

L'énergie électromagnétique volumique s'écrit : $e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$, de moyenne temporelle :

$$\langle e \rangle_{temp} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left\{ \left[1 + \frac{k^2c^2}{\omega^2} \right] \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right\}$$

L'énergie moyenne contenue dans un parallélépipède de section droite a x b et de longueur Δz s'écrit : $\langle \mathscr{E} \rangle = \iiint\limits_{\substack{0\le x\le a \\ 0\le y\le b \\ 0\le z\le \Delta z}} \langle e \rangle_{temp}\, dxdydz = \int_{x=0}^{a} \langle e \rangle_{temp}\, b\Delta z dx$, qui conduit à $\boxed{\langle \mathscr{E} \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 ab\Delta z}$, en utilisant la relation de dispersion.

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting vaut : $\langle \vec{\Pi} \rangle_{temp} = \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e}_z$.

Le flux moyen d'énergie à travers une section droite du guide d'ondes ($S = a$ x b) s'écrit :

$$\langle \Phi \rangle = \iint\limits_{\substack{0\le x\le a \\ 0\le y\le b}} \langle \vec{\Pi} \rangle_{temp} .d\vec{S} = \int_{x=0}^{a} \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right).bdx \text{. Soit } \boxed{\langle \Phi \rangle = \frac{k}{4\mu_0\omega}E_0^2 ab}$$

- **Vitesse de propagation de l'énergie dans le guide d'ondes.**

Soit v_e la vitesse de propagation de l'énergie. La loi de conservation de l'énergie conduit à :

$\langle \mathscr{E} \rangle = \langle \Phi \rangle \Delta t$, avec $\Delta z = v_e \Delta t$, d'où : $v_e = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{k}{\omega} = \frac{k}{\omega}c^2$. Soit encore : $\boxed{v_e = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$.

> ☞ On constate (et c'est heureux !) que la vitesse de propagation de l'énergie dans le guide d'ondes est ***inférieure à c***.

Lien avec la vitesse de groupe.

On rappelle que la vitesse de groupe est définie comme : $\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$.

Compte tenu de la relation de dispersion, il vient : $kdk = \frac{\omega d\omega}{c^2}$, soit encore : $\boxed{v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}}$.

> ☞ On constate que **la vitesse de groupe s'identifie ici avec celle de propagation de l'énergie**. Ce résultat est assez général, dans tout milieu dispersif pour lequel le « paquet d'ondes » qui symbolise la propagation de l'énergie est bien localisé spatialement (donc si la dispersion n'est pas trop importante).

3°) Généralisation ; modes de propagation.

- On aurait pu choisir tout harmonique pour la répartition de E_y suivant x, avec des expressions de la forme $\sin\left(m\frac{\pi x}{a}\right)$. On obtient ainsi une série de modes de champ électrique parallèle à Oy avec plusieurs ventres et noeuds suivant Ox.
- Mais on peut envisager également que E_y varie avec y suivant une loi également sinusoïdale, de la forme $\sin\left(n\frac{\pi y}{b}\right)$: il apparaît ainsi une composante E_x et le champ électrique, tout en restant transversal, présente deux composantes, ayant chacune des nœuds et des ventres : ces différents couples de valeurs ***(m,n)*** définissent les ***modes de propagation*** dans le guide d'ondes, notés ici $\boldsymbol{TE_{m,n}}$. On définit de même des modes $\boldsymbol{TM_{m,n}}$.