Sommaire

2011 2
Asie Juin 2011 2
Centres étrangers Juin 2011 3
Pondichéry avril 2011 4
2010 5
Pondichéry avril 2010 5
2009 6
Antilles-Guyane septembre 2009 6
Antilles-Guyane juin 2009 7
Centres étrangers juin 2009 8
La Réunion juin 2009 9
Amérique du Nord mai 2008 10
Liban juin 2008 11
2008 12
Amérique du Sud novembre 2008 12
2007 13
Liban juin 2007 13
Polynésie juin 2007 14
2004 15
Pondichéry juin 2004 15
2003 16
Centres étrangers juin 2003 16
France métropolitaine juin 2003 18
2002 19
France métropolitaine juin 2002 19
Pondichéry avril 2004 20

2011

Asie Juin 2011

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).

2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives : $\Gamma : z = xy$ et $C : x^2 + z^2 = 1$.

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. **Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C**

a. Démontrer que les coordonnées $(x ; y ; z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que : $x^2(1 + y^2) = 1$.

b. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

3. **Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan**

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geq 2$.

b. Vérifier que : $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = n^4 + 4$

c. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n \geq 2$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

d. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

e. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Centres étrangers Juin 2011

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute justification complète sera valorisée.

Question 1

On considère l'équation (E) : $2x + 11y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.

Affirmation : Les seuls couples solutions de (E) sont les couples :

$$(22k - 2\ ;\ -4k + 1),$$

avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2

On considère l'entier $N = 11^{2012}$.

Affirmation : L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3

On considère, dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 1 + \mathrm{i}$, $b = 3\,\mathrm{i}$, $c = 1 - 2\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(1 - \sqrt{2}\right)$

Affirmation : Le point C est l'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Question 4

On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives : $a = 1 + \mathrm{i}$; $b = 2 - \mathrm{i}$.

Soit f la similitude d'écriture complexe : $z' = \left(-\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}\right)$.

Affirmation : La transformation f est la réflexion d'axe (AB).

Question 5

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la surface S dont une équation est : $z = 4xy$.

Affirmation : La section de la surface S par le plan d'équation $z = 0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

Pondichéry avril 2011

Partie A

On considère, dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, la surface S d'équation : $z = (x - y)^2$.

1. On note E_1 l'intersection de S avec le plan P_1 d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de E_1.

2. On note E_2 l'intersection de S avec le plan P_2 d'équation $x = 1$.
Déterminer la nature de E_2.

Partie B

On considère, dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, la surface S' d'équation : $z = x\,y$.

1. On note E_3 l'intersection de S' avec le plan P_1 d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de E_3.

2. On note E_4 l'intersection de S' avec le plan P_3 d'équation $z = 1$.
Déterminer la nature de E_4.

Partie C

On note E_5 l'intersection de S et de S'.
Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à E_5 dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point O(0 ; 0 ; 0).
On suppose qu'il existe un point M appartenant à E_5 et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.

2. On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.

a. Montrer que les entiers x, y et z vérifient : $x^2 - 3\,x\,y + y^2 = 0$.
En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3\,x'\,y' + y'^2 = 0$.

b. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'.

c. Établir que y' vérifie la relation $1 - 3\,y' + y'^2 = 0$.

d. Conclure.

2010

Pondichéry avril 2010

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples (a, b) d'entiers strictement positifs, tels que $a^2 = b^3$.

Soit (a, b) un tel couple et $d = \text{PGCD}(a, b)$. On note u et v les entiers tels que $a = d\,u$ et $b = d\,v$.

1. Montrer que $u^2 = d\,v^3$.
2. En déduire que v divise u, puis que $v = 1$
3. Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs.

Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

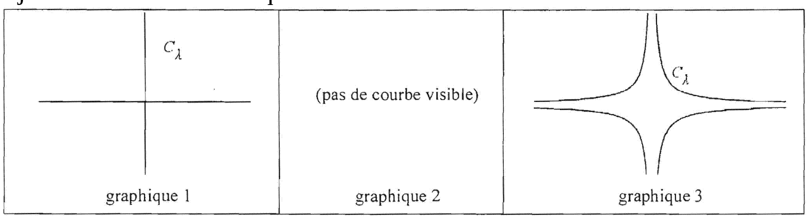
Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère 1a surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.

Pour tout réel λ, on note C_λ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de C_λ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ.

Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.



graphique 1 — graphique 2 — graphique 3

2. *a*. Déterminer le nombre de points de C_{25} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

b. Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question 3 de la partie A.

Déterminer le nombre de points de C_{2010} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

2009

Antilles-Guyane septembre 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation $z = x y + 2 x$.

PARTIE A

On note P le plan d'équation $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan P et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan P .

En **annexe**, le plan P est représenté muni du repère $(A ; \vec{j}, \vec{k})$ où A est le point de coordonnées (2 ; 0 ; 0).

1. a. Déterminer la nature de l'ensemble E_1.

b. Déterminer la nature de l'ensemble E_2.

2. a. Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille **annexe**.

b. Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2.

PARTIE B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : « *soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise b c alors a divise b ou a divise c.* »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x ; y ; z)$ des surfaces S_1 et S_2.où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier. On considère un tel point $M(x ; y ; z)$.

1. a. Montrer que $y (y - x) = x (2 - x)$.

b. En déduire que le nombre premier x divise y.

2. On pose $y = k x$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.

b. En déduire les valeurs possibles de k.

3. Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.

Antilles-Guyane juin 2009

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}.$$

On note A le point d'affixe 2 i .

Affirmation : f est la similitude directe, de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

2. **Affirmation :** $1\,991^{2\,009} \equiv 2\ (7)$.

3. a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Affirmation : $a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $n\,a \equiv n\,b\ (p)$.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

E est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note S la section de E par le plan d'équation $y = 3$.

Affirmation : S est un cercle.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

P est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Affirmation : O le seul point d'intersection de P avec le plan (yOz) à coordonnées entières.

Centres étrangers juin 2009

1. On note (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geq 0$ et $y \geq 0$;

2. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées

L'espace est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on désigne par P le plan d'équation $3x + 2y = 29$.

a. Démontrer que P est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan P avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan P avec les trois plans de coordonnées.

d. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans P et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3. Étude d'une surface

S est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les figures suivantes représentent les intersections de S avec certains plans de l'espace.

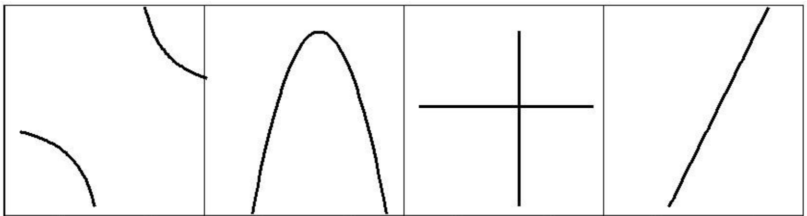


figure n° 1 | figure n° 2 | figure n° 3 | figure n° 4

a. S_1 désigne la section de la surface S par le plan (xOy). Une des figures données représente S_1, laquelle ?

b. S_2 désigne la section de S par le plan R d'équation $z = 1$. Une des figures données représente S_2, laquelle ?

c. S_3 désigne la section de S par le plan d'équation $y = 8$. Une des figures données représente S_3, laquelle ?

d. S_4 désigne la section de S par le plan P d'équation $3x + 2y = 29$ de la question 2.

Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et P dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation $3x + 2y = 29$.

La Réunion juin 2009

L’espace est muni d’un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soient F le point de coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{1}{4}\right)$ et P le plan d’équation $z = -\frac{1}{4}$.

On note d(M, P) la distance d’un point M au plan P.

Montrer que l’ensemble (S) des points M de coordonnées (x ; y ; z) qui vérifient d(M, P) = MF a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

2. *a.* Quelle est la nature de l’intersection de l’ensemble (S) avec le plan d’équation $z = 2$?

b. Quelle est la nature de l’intersection de l’ensemble (S) avec le plan d’équation $x = 0$?

Représenter cette intersection dans le repère $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.

3. Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

a. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

b. Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d’initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l’évaluation.*

Existe-t-il des points qui appartiennent à l’intersection de l’ensemble (S) et du plan d’équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

Amérique du Nord mai 2008

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (x O y).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; – 3) et (– 1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (x O y).

4. *a.* On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

4. *b.* M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm (a ; b) = 440, c'est-à-dire tels que (a ; b) soit solution du système (1) : $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{cases}$.

Montrer que si (a ; b) est solution de (1) alors pgcd (a ; b) est égal à 1 ou 5.

Conclure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Liban juin 2008

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) on considère la similitude directe f d'écriture complexe $z \to \frac{3}{2}(1 - \mathrm{i})z + 4 - 2\,\mathrm{i}$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2\,\mathrm{i}$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul:

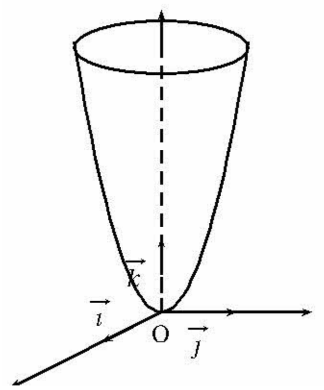
Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ». **Proposition 3 :** « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.

Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14 ; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal. (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

La surface Σ ci-dessous a pour équation $z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole »

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel :

Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leq a \leq b \leq 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\,\mathrm{d}k$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a, b]$.

2008

Amérique du Sud novembre 2008

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées (0 ; 0 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; 1 ; 0) et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = -2 \end{cases}$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. Une équation de *S*

a. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite D.

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées : $\left(\frac{-x+y}{2}\,;\frac{x-y}{2}\,;2-z\right)$.

En déduire MH^2 en fonction de x, y et z.

Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\frac{1}{4}xy$.

2. Étude de la surface *S* d'équation $z = -\frac{1}{4}xy$.

a. On coupe S par le plan $(x\mathrm{O}y)$. Déterminer la section obtenue.

b. On coupe S par un plan P parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

2007

Liban juin 2007

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2\,i\,z + 1$.

Proposition 1 : «Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1 ; 0 ; 5)$ et de rayon 5 ».

3. **Proposition 3 :** « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\,u + b\,v = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

Polynésie juin 2007

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A (1 ; 3 ; 2), B(4 ; 6 ; − 4) et le cône (Γ) d'axe $(O\,;\vec{k})$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (x O y) et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q).

Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

• deux droites parallèles ;
• deux droites sécantes ;
• une parabole ;
• une hyperbole ;
• un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z). Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées (x ; y ; z) où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b. Montrer que si$M$ est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q), alors $x^2 \equiv 1$ modulo10.

c. Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2004

Pondichéry juin 2004

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.

On note C le cercle de centre B passant par A.

Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle C .

2. On nomme S la sphère engendrée par la rotation du cercle C autour de l'axe (O*z*) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (O*z*).

a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.

b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère S .

Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$. Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.

Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

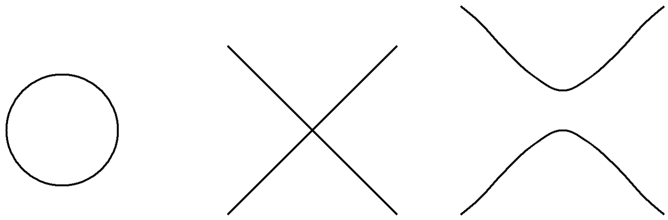


Figure 1 Figure 2 Figure 3

4. Soit $M(x, y, z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls.

Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

2003

Centres étrangers juin 2003

L’espace (E) est muni d’un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface **T** d’équation : $x^2 y = z$ avec $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$.

La figure ci-contre est une représentation de la surface **T**, dans le cube de centre O et de côté 2.

1. Éléments de symétrie de la surface **T**.

a. Montrer que si le point $M(x, y, z)$ appartient à **T**, alors le point $M'(-x, y, z)$ appartient aussi à **T**. En déduire un plan de symétrie de **T**.

b. Montrer que l’origine O du repère est centre de symétrie de **T**.

2. Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles aux axes.

a. Déterminer la nature des courbes d’intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (x O z).

b. Déterminer la nature des courbes d’intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (y O z).

3. Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan (x O y) d’équations $z = k$, avec $k \in [0 ; 1]$.

a. Déterminer l’intersection de la surface **T** et du plan d’équation $z = 0$.

b. Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0, 0, k)$. Déterminer, dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$, l’équation de la courbe intersection de **T** et du plan d’équation $z = k$.

c. Tracer l’allure de cette courbe dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l’arc.

4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.

(D) = { $M(x, y, z) \in (E)$ avec $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq z \leq x^2 y$.

a. Pour $0 < k \leq 1$, le plan d’équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu’on peut visualiser sur le graphique de la **question 3 c**.

C’est l’ensemble des points M du cube unité, de coordonnées (x, y, z) tels que $y \geq \dfrac{k}{x^2}$ et $z = k$.

Calculer en fonction de k l’aire $S(k)$ exprimée en unités d’aire, de cette surface.

b. On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D). On rappelle que $V = \int_0^1 \mathrm{S}(k)\,\mathrm{d}\,k$.

France métropolitaine juin 2003

1. L’espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a. Montrer que les plans P et Q d’équations respectives :

$$x + y\sqrt{3} - 2z = 0 \text{ et } 2x - z = 0$$ ne sont pas parallèles.

b. Donner un système d’équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

c. On considère le cône de révolution Γ d’axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.

Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

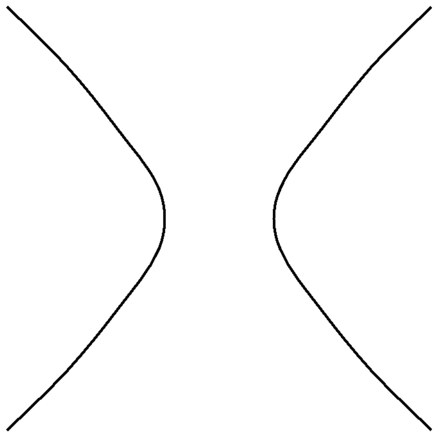


Figure 1

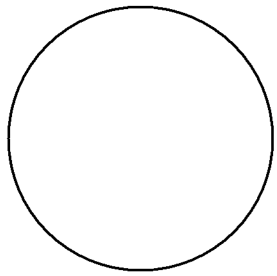


Figure 2

3. a. Montrer que l’équation $x^2 \equiv 3\ [7]$, dont l’inconnue x est un entier relatif, n’a pas de solution,

b. Montrer la propriété suivante : pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. a. Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :

si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

2002

France métropolitaine juin 2002

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Pondichéry avril 2004

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère (O ; $\vec{j}$, $\vec{k}$). On note C le cercle de centre B passant par A.

Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle C.

2. On nomme S la sphère engendrée par la rotation du cercle C autour de l'axe (O*z*) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (O*z*).

a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation : $x^2 + y^2 = z^2$.

b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère S.

Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan P, d'équation $x = 1$.

Dans P_1 l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection. Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

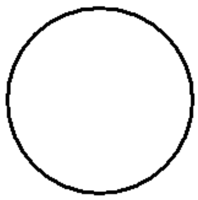


Figure 1

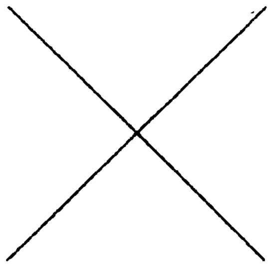


Figure 2

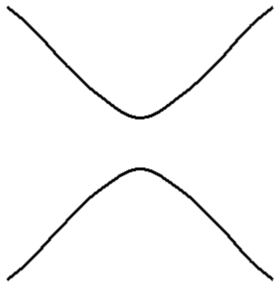


Figure 3

4. Soit M (x, y, z) un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.