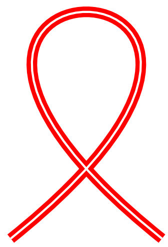
Courbes de Bézier

1 Présentation

Tout le monde connaît le symbole de la lutte contre le sida : ce petit ruban rouge que l'on accroche à sa boutonnière.



D'un point de vue mathématique, la courbe tracée n'est pas la représentation d'une fonction. On peut la représenter au moyen de coordonnées paramétriques (on verra plus loin) mais on peut aussi la considérer comme une courbe de Bézier, ce qui permet de la tracer très rapidement.

On va en voir un peu plus sur les courbes de Bézier et la façon de les tracer en LaTeX.

2 En STS

C'est dans certaines sections de technicien supérieur (STS) que l'on étudie les courbes de Bézier ; on apprend à transformer en représentations paramétriques des courbes définies par 3 ou 4 points de contrôle.
Voyons un exercice d'un sujet posé lors d'une épreuve de BTS de mai 2017 ; on trouve le sujet complet sur le site de l'APMEP et, comme la plupart des sujets présents sur ce site, il a été tapé par Denis Vergès.

2.1 Une partie de l'exercice

Un designer décide de concevoir une chaise longue adaptée au profil du corps humain. Pour cela, il va modéliser la chaise à l'aide de deux courbes de Bézier, $\mathscr{C}_1$ pour l'assise et $\mathscr{C}_2$ pour la base.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $\mathrm{P}_0(0~;~9)$; $\mathrm{P}_1(5~;~-5)$; $\mathrm{P}_2(9~;~8)$ et $\mathrm{P}_3(12~;~1)$.
La courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$, définie par ces quatre points de contrôle est tracée sur la figure donnée en annexe 2. Sur cette courbe est placé le point A utilisé à la question **6.**

1. Placer les points P_0, P_1, P_2 et P_3 sur la figure donnée en annexe 2.

2. Quelle(s) tangente(s) à la courbe $\mathscr{C}_1$, peut-on connaître sans effectuer aucun calcul ? Justifier la réponse.

3. Pour créer la base de cette chaise, le designer considère la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ définie par les points de contrôle $\mathrm{P}_0(0 ; 9)$; $\mathrm{P}_4(1~;~-3)$ et $\mathrm{P}_3(12~;~1)$.
Cette courbe est l'ensemble des points $\mathrm{M}(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0~,~1]$:

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)} = (1-t)^2\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + 2t(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_4} + t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}.$$

a. Démontrer que les coordonnées x et y des points $\mathrm{M}(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_2$ ont pour expression :

$$x = f(t) = 10t^2 + 2t \text{ et } y = g(t) = 16t^2 - 24t + 9.$$

b. Étudier les variations des fonctions f et g définies pour t dans l'intervalle $[0~,~1]$ par :

$$f(t) = 10t^2 + 2t \text{ et } g(t) = 16t^2 - 24t + 9.$$

Rassembler les résultats dans un tableau unique.

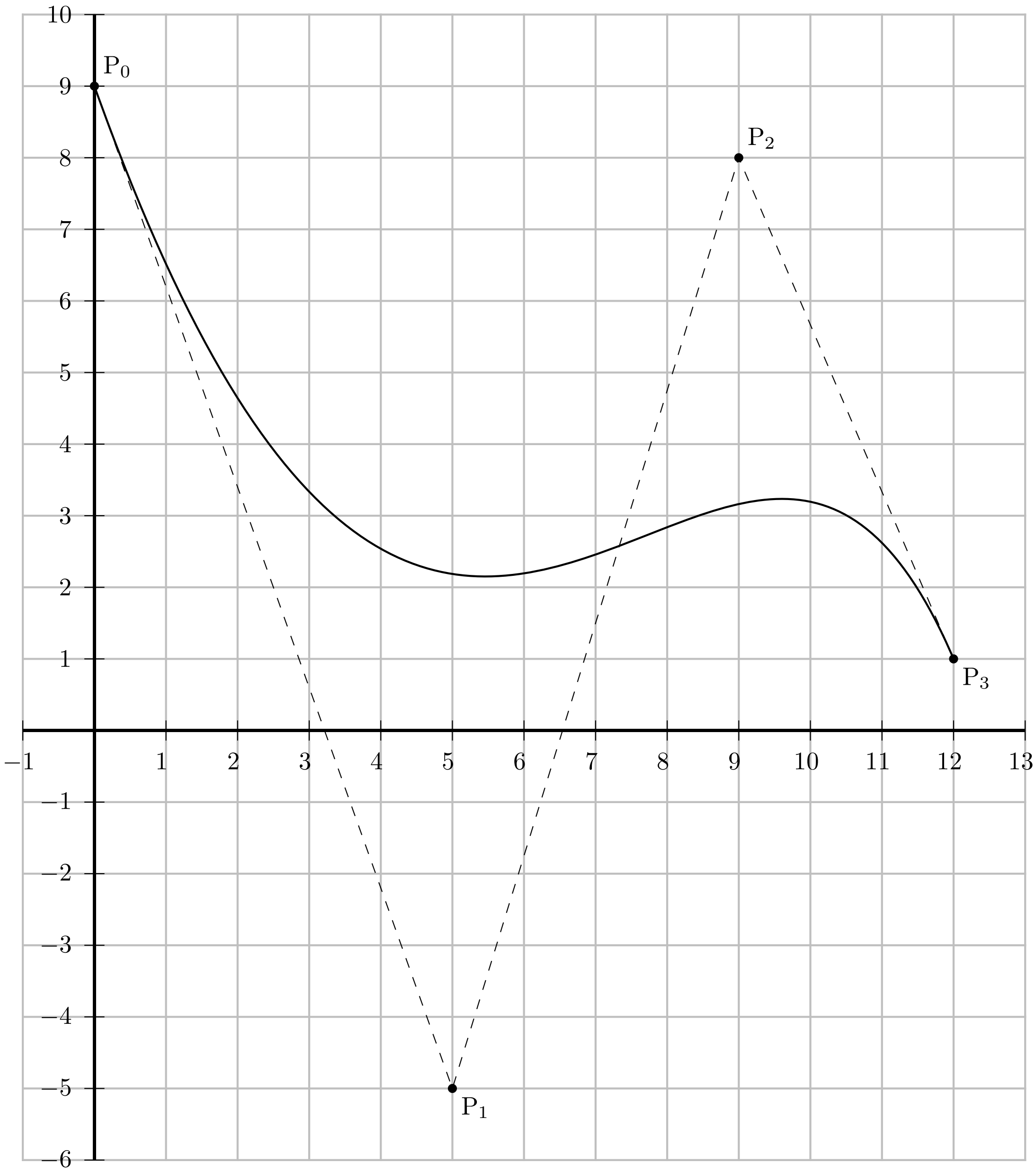
4. ...

3 Avec quatre points de contrôle

La courbe $\mathscr{C}_1$ du sujet de BTS est définie par quatre points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3.

3.1 La courbe

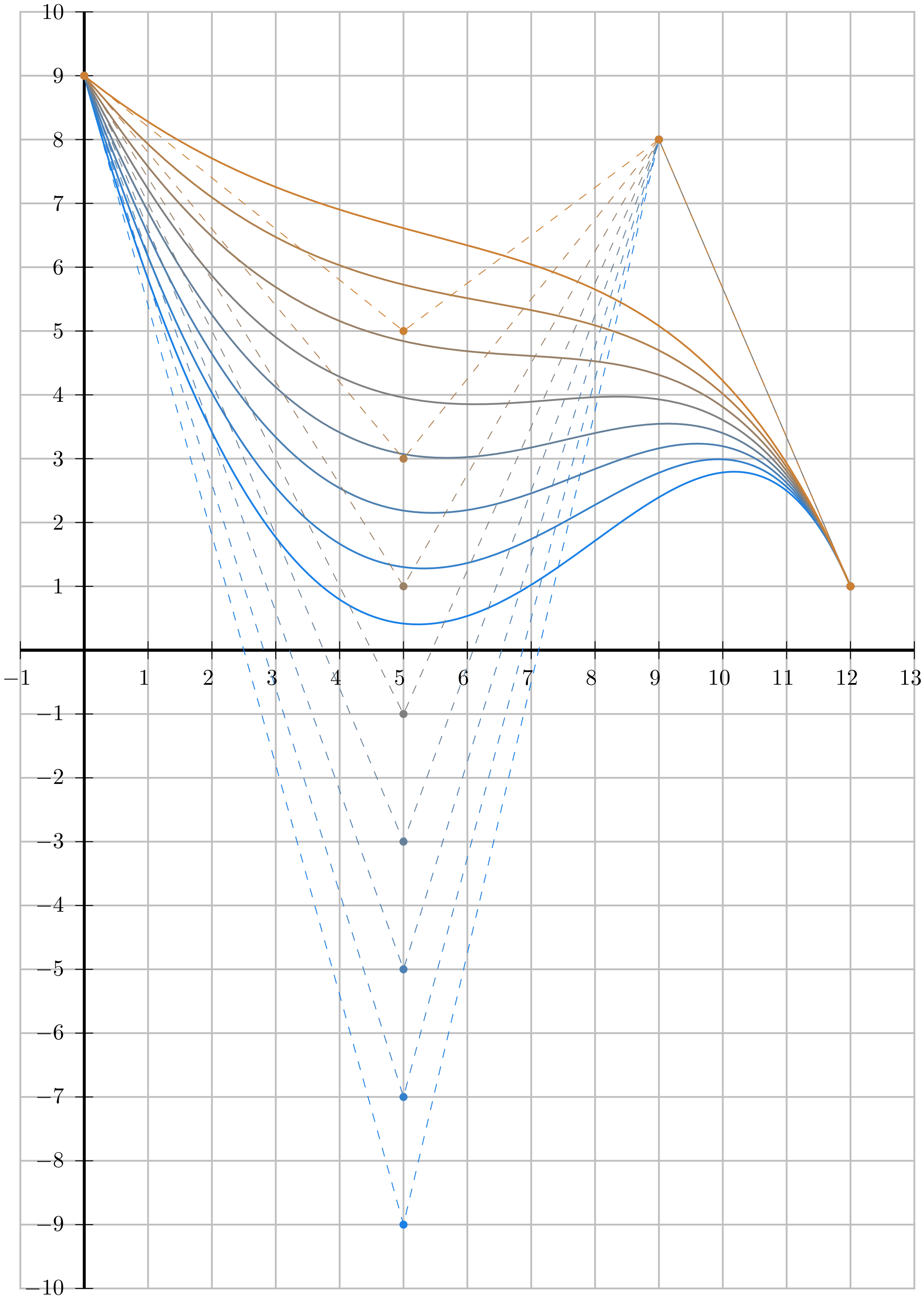
Le package `pstricks` (chargé dans ce document par `pst-all`) contient l'instruction `\psbezier` qui fait tout le travail ; l'option `showpoints=true` permet de visualiser les points de contrôle et les segments qui joignent ces points (et dont deux sont des tangentes à la courbe).



L'instruction `\psbezier` permet les options sur la couleur du tracé (`linecolor`), son épaisseur (`linewidth`), son style (`linestyle`), etc.

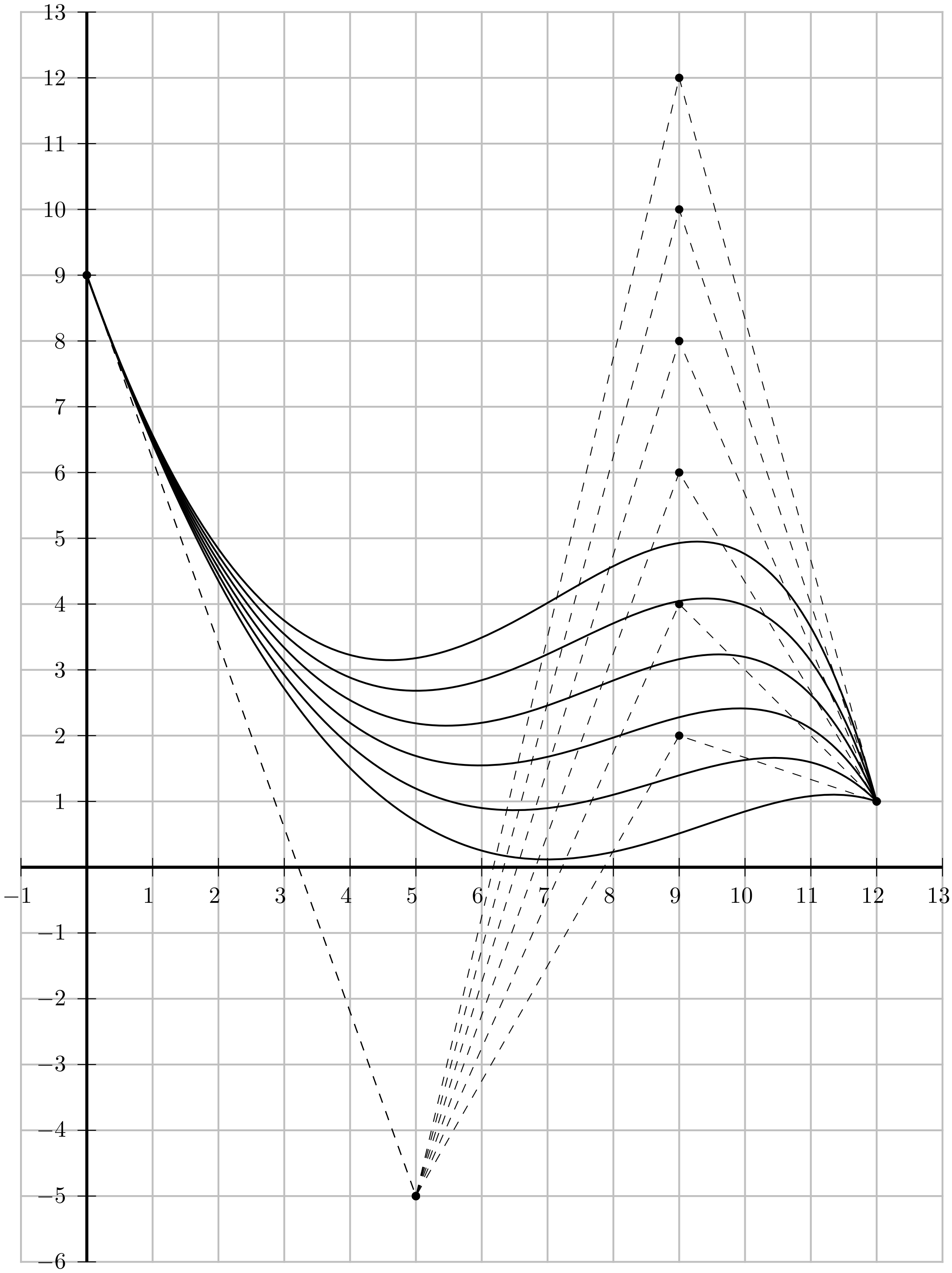
3.2 Modification d'un point de contrôle

Voici quelques tracés quand on modifie le point de contrôle P_1 :



3.3 Modification de l'autre

Et voici quelques tracés si on modifie le point P_2 :



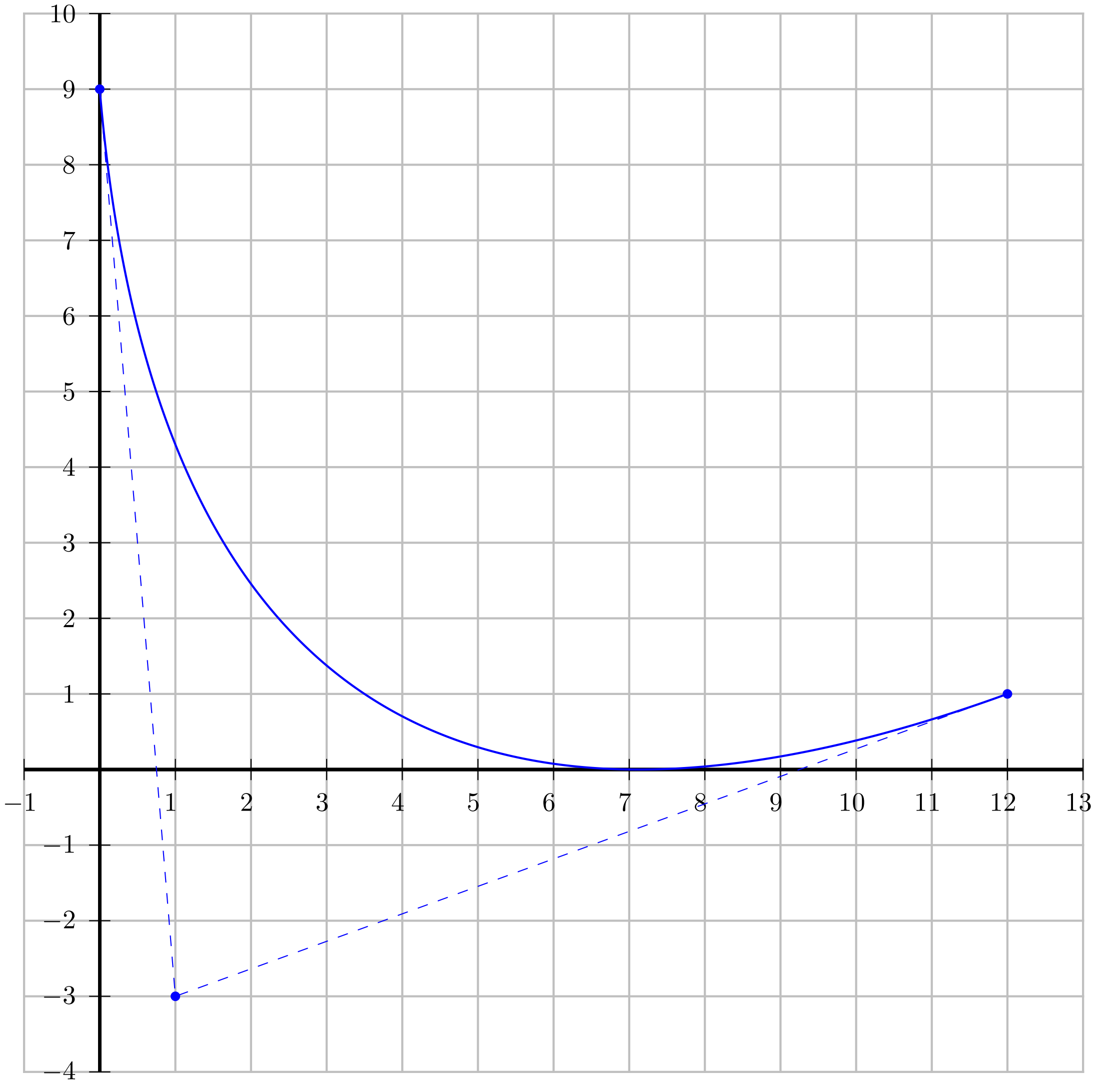
3.4 L'aspect mathématique

La courbe de Bézier définie par les quatre points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3, est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{OM} = (1-t)^3\ \overrightarrow{OP_0} + 3t(1-t)^2\ \overrightarrow{OP_1} + 3t^2(1-t)\ \overrightarrow{OP_2} + t^3\ \overrightarrow{OP_3}$
où t parcourt l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ et O est l'origine du repère.
En projetant cette égalité vectorielle sur les deux axes définis par le repère, on obtient la représentation paramétrique de la courbe ; $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & -3\,t^2+15\,t \\ y(t) & = & -47\,t^3+81\,t^2-42\,t+9 \end{array}\right.$ avec $t \in [0\ ,\ 1]$

4 Avec trois points de contrôle

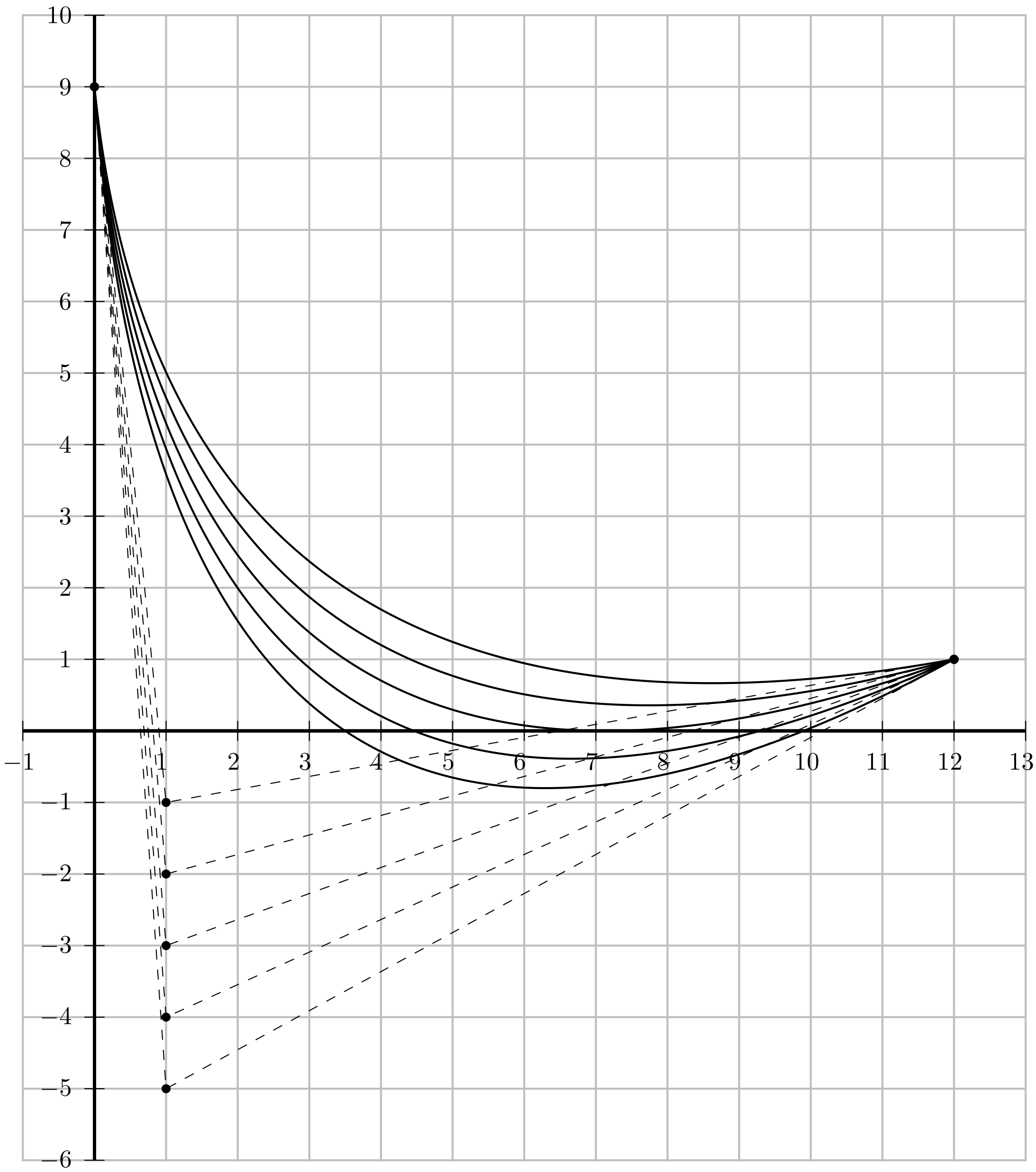
La courbe $\mathscr{C}_2$ du sujet de BTS est construite à partir de 3 points de contrôle. Une ancienne instruction TEX permet de tracer ce genre de courbe de Bézier : il s'agit de `\qbezier`. Mais cette instruction ne permet pas les options `linecolor` ou `linestyle`. Denis Vergès m'a signalé qu'il y avait beaucoup plus simple dans le package `pst-func` : ce sont les instructions `\psBezier1`, `\psBezier2`, `\psBezier3`, ..., `\psBezier9` qui tracent des courbes de Bézier à respectivement 2, 3, 4, ..., 10 points de contrôle. Attention au B qu'il faut écrire en capitale.

4.1 La courbe



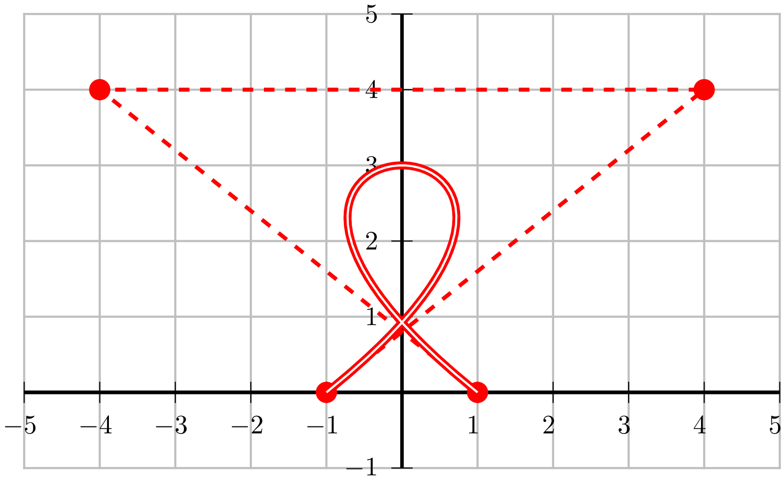
4.2 Quelques variations

Voici quelques tracés si on modifie le point de contrôle du milieu :



5 \parametricplot

Retrouvons la courbe du paragraphe 1 :



L'écriture sous forme paramétrique de cette courbe est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 26\,t^3 - 39\,t^2 + 15\,t - 1 \\ y(t) & = & -12\,t^2 + 12\,t \end{array}\right. \qquad \text{avec } t \in [0\ ,\ 1]$$

C'est l'instruction `\parametricplot` qui permet de tracer une courbe en mode paramétrique avec pour syntaxe :

- `\parametricplot[options]{t_début}{t_fin}{x(t) y(t)}`
  si on écrit les fonctions en mode post-fixé.
  C'est l'espace qui marque la séparation entre $x(t)$ et $y(t)$;
- `\parametricplot[options]{t_début}{t_fin}{x(t)|y(t)}`
  si on écrit les fonctions en mode algébrique.
  Le signe de séparation entre $x(t)$ et $y(t)$ est alors `|` (Alt Gr 6 sur PC).

En écrivant $26\,t^3 - 39\,t^2 + 15\,t - 1$ sous la forme $t\,(t\,(26\,t - 39) + 15) - 1$, on obtient la forme post-fixée suivante : `t t 26 t mul 39 sub mul 15 add mul 1 sub`.
Et en écrivant $-12\,t^2 + 12\,t$ sous la forme $12\,t\,(1 - t)$ on obtient : `12 t 1 t sub mul mul`.
On entrera donc l'instruction :

```
\parametricplot{0}{1}{t t 26 t mul 39 sub mul 15 add mul 1 sub 12 t 1  t sub mul mul}
```

Pour la forme algébrique, on écrira :

```
\parametricplot[algebraic]{0}{1}{26*t^3-39*t^2+15*t-1|12*t-12*t^2}
```

sans oublier de bien entrer le signe `*` pour chaque multiplication.