

Dans le plan complexe muni du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

- Démontrer que α et β sont solution de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$
- Exprimer α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$ puis en déduire sa valeur.
- On appelle A_k le point d'affixe z_0^k avec $k = 0, \dots, 4$. Soit H le point d'intersection de la droite $(A_k A_4)$ avec l'axe des abscisses. Montrer que $OH = \cos \frac{2\pi}{5}$.
- Soit Ω (resp. Σ) le point d'affixe $-\frac{1}{2}$ (resp. i). On note C le cercle de centre Ω passant par le point Σ .
 - Calculer le rayon de cercle C.
 - Ce cercle coupe l'axe des abscisses en deux point M et N. On appelle M le point d'abscisse positive. Montrer que $OM = |\alpha|$ et $ON = |\beta|$.
 - En déduire que le point H est le milieu du segment $[OM]$.
 - Construire à la règle et au compas le pentagone régulier $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$.

CORRECTION

$$1. \quad \alpha^2 = (z_0 + z_0^4)^2 = z_0^2 + 2z_0 z_0^4 + z_0^8 = z_0^2 + 2z_0^5 + z_0^8$$

$$z_0^8 = e^{i\frac{16\pi}{5}} \text{ or } \frac{16}{5} = 2 + \frac{6}{5} \text{ donc } e^{i\frac{16\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}} = z_0^3$$

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = z_0^2 + 2z_0^5 + z_0^3 + z_0 + z_0^4 - 1 = z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 + 2z_0^5 - 1$$

$$z_0^5 = e^{i2\pi} = 1 \text{ donc } \alpha^2 + \alpha - 1 = 1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4$$

$$\text{si } q \neq 1 \text{ alors } 1 + q + q^2 + \dots + q^4 = \frac{1-q^5}{1-q} \text{ donc } 1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = \frac{1-z_0^5}{1-z_0} = 0 \text{ donc } \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

α est solution de $z^2 + z - 1 = 0$

$$\beta^2 = (z_0^2 + z_0^3)^2 = z_0^4 + 2z_0^2 z_0^3 + z_0^6 = z_0^4 + 2z_0^5 + z_0^6$$

$$z_0^5 = 1 \text{ donc } 2z_0^5 + z_0^6 = 2 + z_0$$

$$\beta^2 + \beta - 1 = 2 + z_0 + z_0^4 + z_0^2 + z_0^3 - 1 = 1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0 \text{ pour les mêmes raisons que précédemment}$$

donc $\beta^2 + \beta - 1 = 0$ et β est solution de $z^2 + z - 1 = 0$

$$2. \quad z_0^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} \text{ or } \frac{8}{5} = 2 - \frac{2}{5} \text{ donc } e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{z_0} \text{ donc } \alpha = z_0 + \overline{z_0} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$$

α est solution de $z^2 + z - 1 = 0$

$$\Delta = 5 \text{ donc } z^2 + z - 1 = 0 \text{ admet deux solutions } z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos \frac{2\pi}{5} > 0 \text{ donc } \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et donc } \beta \text{ est la seconde solution } \beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$3. \quad A_4 \text{ a pour affixe } e^{i\frac{8\pi}{5}} \text{ ou encore } e^{-i\frac{2\pi}{5}}$$

A_1 a pour affixe $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ donc A_1 et A_4 ayant des affixes conjuguées sont symétriques par rapport à la droite $(O ; \vec{u})$

La droite $(A_1 A_4)$ a pour équation $x = \cos \frac{2\pi}{5}$ donc H point d'intersection de la droite $(A_1 A_4)$ avec l'axe des abscisses a pour affixe

$$\cos \frac{2\pi}{5} \text{ et } \cos \frac{2\pi}{5} > 0 \text{ donc } OH = \cos \frac{2\pi}{5}.$$

$$4. a. \quad C \text{ est le cercle de centre } \Omega \text{ passant par le point } \Sigma \text{ donc le rayon de cercle C est } \Omega \Sigma = \left| \frac{1}{2} + i \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$b. \quad \Omega M = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ donc } x_M + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ soit } x_M = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \alpha \text{ donc } OM = \alpha$$

$$\Omega N = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ donc } x_N + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ soit } x_N = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \beta \text{ donc } ON = |\beta|.$$

$$c. \quad M \text{ a pour affixe } \alpha \text{ donc } \overline{OM} = \alpha \text{ donc } \overline{OM} = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \text{ soit } \overline{OM} = 2 \overline{OH} \text{ donc H est le milieu de } [OM].$$

Pour construire à la règle et au compas le pentagone :

Construire les points Ω et Σ , puis le cercle de centre Ω passant par Σ (cercle bleu)

Ce cercle coupe l'axe des abscisses en deux points l'un M d'abscisse positive, l'autre N d'abscisse négative.

$\left| e^{i \frac{2k\pi}{5}} \right| = 1$ donc tous les points A_k appartiennent au cercle de centre O de rayon 1.

Soit H le milieu de $[OM]$, la perpendiculaire en H à l'axe des abscisses coupe le cercle de centre O de rayon 1 en deux points A_1 et A_4 .

Soit A_0 le point d'affixe 1

En reportant successivement les arcs de cercles $\widehat{A_0 A_1}$, on peut construire sur le cercle rouge, les points A_2 et A_3 puis le pentagone régulier $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$

