

En janvier 2012, une banque a 2000 clients qui se répartissent en des: clients d'agence (noté A) et des clients internet (noté I). 92 % sont des clients d'agence et 8 % par internet.

Chaque mois 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.

Le nombre de clients reste le même au fil du temps et un client ne peut faire partie des deux catégories.

Notons  $A_1$  le nombre de clients d'agence en janvier 2012 et  $I_1$  le nombre de clients internet en janvier 2012.

Le mois de janvier 2012 est de rang 1, celui de février de rang 2 etc..

Désignons pas  $(A_n \ I_n)$  la matrice ligne indiquant le nombre de clients respectifs le mois de rang  $n$ .

1. Montrer que  $(A_1 \ I_1) = (1840 \ 160)$

2. Déterminer la matrice  $(A_2 \ I_2)$

3. On note  $C \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$ , vérifier que  $(A_2 \ I_2) = (A_1 \ I_1) \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$ .

4. On admet que  $(A_n \ I_n) = (A_1 \ I_1) C^{n-1}$ . Calculer le nombre de clients d'agence et d'internet en décembre 2012, en décembre 2015, en décembre 2022 et en décembre 2032. Quelle conjecture peut-on faire ?

### CORRECTION

1. Au 1<sup>er</sup> janvier la banque a 2000 clients, 92 % sont des clients d'agence soit  $2000 \times 0,92 = 1840$  clients d'agence donc  $A_1 = 1840$

$I_1 = 2000 - 1840 = 160$  donc  $(A_1 \ I_1) = (1840 \ 160)$

2. Chaque mois 5 % des clients d'agence deviennent clients internet donc et 1 % des clients internet deviennent clients d'agence donc :

En agence on a 95 % des clients d'agence précédents et 1 % des clients internet du mois précédent donc  $A_2 = 0,95 A_1 + 0,01 I_1 = 1749,6$

Par internet : on a 5 % des clients d'agence précédents et 99 % des clients internet du mois précédent donc  $I_2 = 0,05 A_1 + 0,99 I_1 = 250,4$ .

3.  $(A_1 \ I_1) \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} = (0,95 A_1 + 0,01 I_1 \quad 0,05 A_1 + 0,99 I_1)$

$(A_1 \ I_1) \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} = (A_2 \ I_2)$

4. On admet que  $(A_n \ I_n) = (A_1 \ I_1) C^{n-1}$ . Calculer le nombre de clients d'agence et d'internet en décembre 2012, en décembre 2015, en décembre 2022 et en décembre 2032. Quelle conjecture peut-on faire ?

Le mois de janvier 2012 est de rang 1, celui de février de rang 2 donc le mois de décembre 2012 est de rang 12

$(A_{12} \ I_{12}) = (A_1 \ I_1) C^{12-1}$ .

$(A_{12} \ I_{12}) = (1096,156 \ 903,844)$  à  $10^{-3}$  près

Le mois de décembre 2015 est de rang  $12 \times 4 = 48$

$(A_{48} \ I_{48}) = (A_1 \ I_1) C^{48-1}$ .

$(A_{48} \ I_{48}) = (415,563 \ 1584,437)$  à  $10^{-3}$  près

Le mois de décembre 2022 est de rang  $12 \times 11 = 132$

$(A_{132} \ I_{132}) = (A_1 \ I_1) C^{132-1}$ .

$(A_{132} \ I_{132}) = (333,788 \ 1666,212)$  à  $10^{-3}$  près

Le mois de décembre 2032 est de rang  $12 \times 21 = 252$

$(A_{252} \ I_{252}) = (A_1 \ I_1) C^{252-1}$ .

$(A_{252} \ I_{252}) = (333,334 \ 1666,666)$  à  $10^{-3}$  près

A long terme, il semble qu'il y aura environ 333 clients en agence et 1667 clients internet.