Nouvelle-Calédonie novembre 2016

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} - 0{,}1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f sur $[0\ ;+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\ ;1]$.

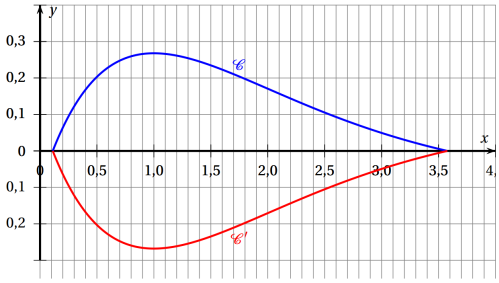
On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que

$$\alpha < \beta \text{ et } f(\beta) = 0.$$

On note C la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\ ;\beta]$ dans un repère orthogonal et C $'$ la courbe symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\ ;\beta]$ par

$$F(x) = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 0{,}1\,x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\ ;\beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes C et C $'$.

On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0{,}112$ et $\beta \approx 3{,}577$.

6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes. Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. *a.* Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre $P(X \leq 125 - t)$ et $P(X \geq 125 + t)$.

b. On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer $P(121 \leq X \leq 129)$.

2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que $P(123 \leq X \leq 127) = 0{,}68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

a. On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

b. On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

4. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est 0,988. On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes.

Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(\mathrm{O}\ ;\vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de a.

b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle C de centre O et de rayon 1.

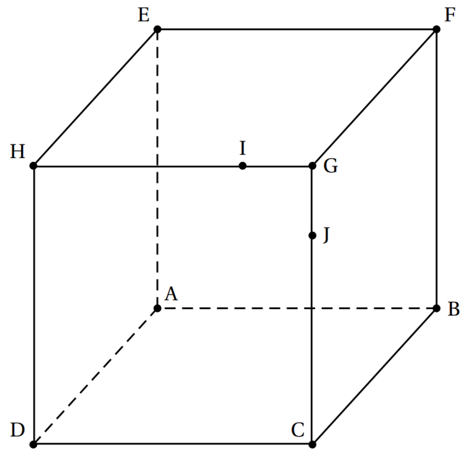
a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ un nombre réel.

b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

EXERCICE 4 3 points Commun à tous les candidats

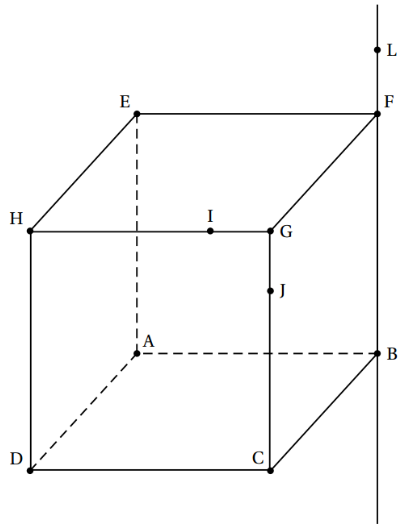
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.

1. Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].

2. Sur graphique ci-dessous, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).



3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente. Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, un désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année.
Ainsi, on a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8\, u_n + c$.

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n)

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse. Interpréter ces deux résultats.

Partie B L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000. On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif. On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5\,c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

EXERCICE 5 5 points Candidats avant suivi l'enseignement de spécialité

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers, dans cette population au bout du n-ième jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5{,}1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.
En d'autres termes, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} = 0{,}9\,(u_{n+1} - u_n)$.

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5{,}19$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = A\,V_n$.
On admet alors que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n\,V_0$.

b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1}.
En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}\,A\,P$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Pour tout entier naturel n, on admet que $A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0{,}9^{n+1} + 10 & 10 \times 0{,}9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0{,}9^{n} + 10 & 10 \times 0{,}9^{n} - 9 \end{pmatrix}$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0{,}9^n$.

3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -0{,}1$

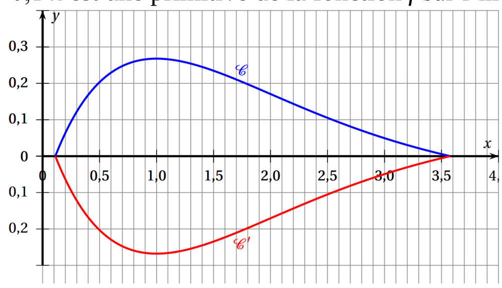
2. $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1 - x)\,e^{-x}$

La fonction exponentielle est strictement positive donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-0{,}1$	$\nearrow$	$e^{-1} - 0{,}1$	$\searrow$	$-0{,}1$

3. La fonction f est définie continue strictement croissante sur $[0\,;1]$, $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;1]$.

4. $\begin{cases} u(x) = x + 1 & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $F'(x) = -e^{-x} + (x + 1)\,e^{-x} - 0{,}1 = x\,e^{-x} - 0{,}1 = f(x)$ donc la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$ par $F(x) = -(x + 1)\,e^{-x} - 0{,}1\,x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$.



5. La courbe C' est la symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses donc $A = 2\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

$A = 2\,[F(\beta) - F(\alpha)]$ donc $A \approx 2 \times 0{,}5197$ soit $A \approx 1{,}039$ à 0,001 près.

6. L'unité sur chaque axe est de 5 mètres, donc une unité d'aire est égale à 25 m^2. L'aire du domaine entre les deux courbes est donc approximativement de $1{,}039 \times 25 = 25{,}975$ m^2.
On peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré donc sur 26 m2 on en disposera $25{,}975 \times 36$ soit 935 plants de tulipes

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. ***a.*** La fonction de Gauss est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ soit $x = 125$ donc pour tout nombre réel t positif, $P(X \le 125 - t) = P(X \ge 125 + t)$.

b. 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture donc P(X ≤ 121) = 0,023
P(121 ≤ X ≤ 129) = P(X ≤ 129) – P(X ≤ 121) or P(X ≤ 125 − *t*) = P(X ≥ 125 + *t*) donc P (X ≥ 129) = P(X ≤ 121)
donc P (X ≤ 129) = 1 – P(X ≥ 129) = 1 – P(X ≤ 121)
donc P(121 ≤ X ≤ 129) = 1 – P(X ≤ 121) – P(X ≤ 121) soit P(121 ≤ X ≤ 129) = 1 – 2 P(X ≤ 121)
P(121 ≤ X ≤ 129) = 1 – 0,023 × 2 = 0,954.

2. P(123 ≤ X ≤ 127) = 0,68

Soit $T = \frac{X-125}{\sigma}$, *T* suit une loi normale centrée réduite alors P(123 ≤ X ≤ 127) = $P\left(\frac{-2}{\sigma} \leq T \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}68$.

En utilisant la calculette, $\frac{2}{\sigma} = 0{,}994$ donc $\sigma = \frac{2}{0{,}994}$ soit approximativement σ ≈ 2.

3. *a.* En utilisant la calculette, P(120 ≤ X ≤ 130) = 0,9876.

b. P(X ≤ 130) = 0,992379

$$P_{X\leq 130}\left(\overline{120 \leq X \leq 130}\right) = \frac{P(X\leq 120)}{P(X\leq 130)} = \frac{0{,}00621}{0{,}992379} \approx 61\times 10^{-4}$$

4. Comme 900 > 30, 900 × 0,988 > 5 et 900 × (1 − 0,988) > 5, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est :

$$I = \left[\ p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\ \right] \text{ soit } I = \left[\ 0{,}988 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}988(1-0{,}988)}}{900}\ ; 0{,}988 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}988(1-0{,}988)}}{900}\ \right]$$

I ≈ [0,980; 0,996].

$f_{obs} = \frac{871}{900} \approx 0{,}968$ donc $f_{obs} \notin$ I, donc on rejette l'hypothèse « La machine est bien réglée » au seuil de 95%.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Soit *f* la transformation qui à tout nombre complexe *z* non nul associe le nombre complexe *f* (*z*) défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

1. *a.* $|a| = -\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 1$ et $\arg a = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ à 2 π près donc $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

b. $f(a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$

2. $f(z) = 1 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = z$ et $z \neq 0$

$z^2 - z + 1 = 0$, $\Delta = -3$ donc $z_1 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

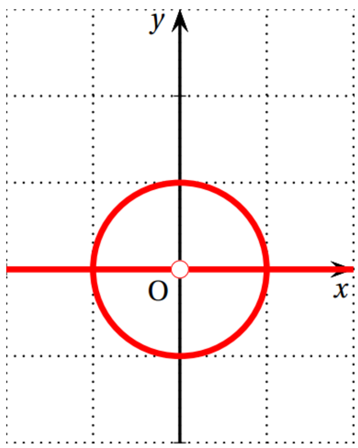
3. *a.* M un point d'affixe *z* du cercle C de centre O et de rayon 1 donc OM = 1 soit | *z* | = 1 donc il existe un réel θ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

b. $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta$ donc *f* (*z*) est un nombre réel.

4. *f* (*z*) est un nombre réel ⇔ $f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z - \bar{z} = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z} \Leftrightarrow$

$z - \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} \Leftrightarrow (z - \bar{z})\left(\frac{1}{z\bar{z}} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$ ou $z\bar{z} = 1$

⇔ *z* est réel non nul ou | *z* | = 1
M décrit soit l'axe des réels privé de O soit le cercle de centre O de rayon1.



On aurait pu aussi remplacer *z* par *x* + i *y* avec *x* et *y* réels

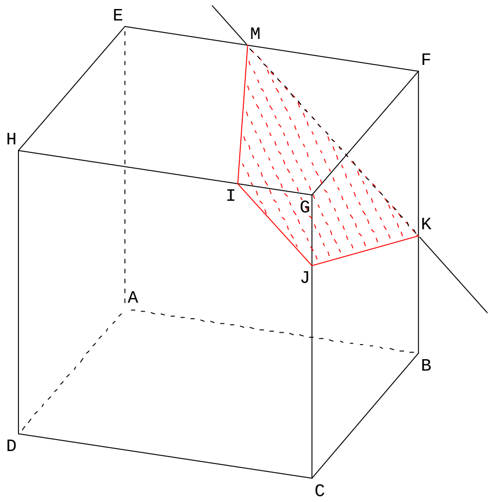
f (*z*) est un nombre réel ⇔ $x + \mathrm{i}\,y + \frac{1}{x + \mathrm{i}\,y}$ réel ⇔

$x + \mathrm{i}\,y + \frac{x - \mathrm{i}\,y}{x^2 + y^2}$ réel ⇔ $x + \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ réel

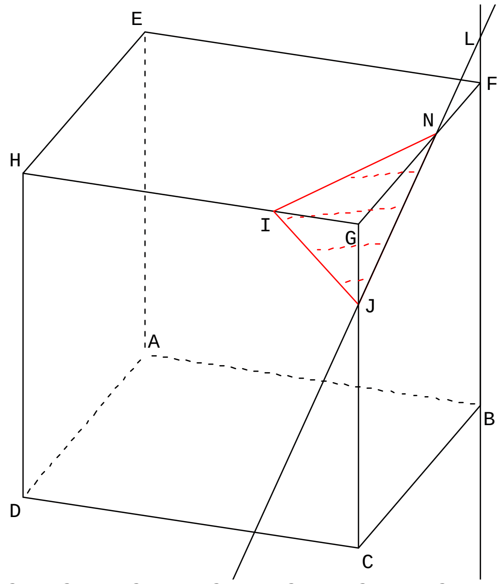
⇔ $y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$ avec $(x\ ;y) \neq (0\ ;0)$ d'où le résultat

EXERCICE 4 3 points Commun à tous les candidats

1. Le plan (IJK) coupe le plan (CDG) suivant la droite (IJ), le plan (BCG) suivant la droite (JK).
Les plans (ABF) et (BCG) sont parallèles donc le plan (IJK) coupe le plan (ABF) suivant une droite parallèle à (IJ)
Cette droite coupe (EF) en M.
Le plan (IJK) coupe le plan (EFG) suivant la droite (IM) d'où la section demandée :



2. Le plan (IJL) coupe le plan (CDG) suivant la droite (IJ), le plan (BCG) suivant la droite (JL).
Cette droite coupe (GF) en N.
Le plan (IJL) coupe le plan (EFG) suivant la droite (IN) d'où la section demandée :



3. Les triangle GIJ, GIN, GNJ sont rectangles en G, $IJ^2 = IG^2 + GJ^2$, $IN^2 = IG^2 + NG^2$ et $JN^2 = JG^2 + NG^2$

Le triangle NIJ est équilatéral si et seulement si $GN = GI = GJ = \frac{1}{4} GF$. Le point N est alors unique et tel que $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1.

n	0	1	2	3	4	5	…	28	29	30
u_n	1	1,8	2,44	2,952	3,3616	3,68928	…	4,992	4,994	4,995

La suite semble être croissante et converger vers 5.

2. **Initialisation :** $u_0 = 1$ or $5 - 4 \times 0{,}8^0 = 5 - 4 \times 1 = 1$ donc $u_0 = 5 - 4 \times 0{,}8^0$, la propriété est initialisée

Hérédité, Montrons que pour tout entier n, si $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$ alors $u_{n+1} = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$.
$u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 1$ or $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$ donc $u_{n+1} = 0{,}8\,(5 - 4 \times 0{,}8^n) + 1$
$u_{n+1} = 4 - 4 \times 0{,}8^{n+1} + 1$ donc $u_{n+1} = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.

3. $-1 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$

$u_{n+1} - u_n = 0{,}8\, u_n + 1 - u_n$
$u_{n+1} - u_n = 1 - 0{,}2\, u_n$ or $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$ donc $u_n \leq 5$ donc $0{,}2\, u_n \leq 1$ donc $1 - 0{,}2\, u_n \geq 0$
$u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante
Si l'apiculteur rachète chaque année 10 000 abeilles, le nombre d'abeilles va augmenter chaque année et va tendre vers 50 000.

Partie B

1. $u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + c$ or $u_n = v_n + 5\,c$ donc $u_{n+1} = v_{n+1} + 5\,c$ donc en remplaçant :
$v_{n+1} + 5\,c = 0{,}8\, v_n + 4\,c + c$ soit $v_{n+1} = 0{,}8\, v_n$
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison et de premier terme $v_0 = u_0 - 5\,c = 1 - 5\,c$

2. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison et de premier terme $v_0 = 1 - 5\,c$ donc $v_n = 0{,}8^n\,(1 - 5\,c)$

3. $-1 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

$u_n = v_n + 5\,c$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} = 5\,c$

L'apiculteur atteint son objectif si $5\,c = 100$ soit $c = 20$
Il faut donc que l'apiculteur achète 20 000 abeilles pour atteindre son objectif.

EXERCICE 5 5 points Candidats avant suivi l'enseignement de spécialité

1. Si $n = 0$ alors $u_2 - u_1 = 0{,}9\,(u_1 - u_0)$ donc $u_2 = 5{,}1 + 0{,}9\,(5{,}1 - 5)$ donc $u_2 = 5{,}19$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. $A\,V_n = \begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}9\,u_{n+1} - 0{,}9\,u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

or $u_{n+2} - u_{n+1} = 0{,}9\,(u_{n+1} - u_n)$ donc $u_{n+2} = u_{n+1} + 0{,}9\,(u_{n+1} - u_n) = 1{,}9\,u_{n+1} - 0{,}9\,u_n$

donc $A\,V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}$

On admet alors que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n\,V_0$.

b. $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, à l'aide de la calculatrice, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$

$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}9\times 10 + 10 & 10\times 0{,}9 \\ 10\times 1{,}9 - 9 & -10\times 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}9\times 9 + 9 & -9+9 \\ 9-9 & 10-9 \end{pmatrix}$

$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$

c. **Initialisation :** $A \neq O$ donc $A^0 = I_2$ or $P\,D^0\,P^{-1} = P\,P^{-1} = I_2$ donc si $n = 0$, $A^0 = P\,D^0\,P^{-1}$, la propriété est initialisée.
Hérédité, Montrons que pour tout entier n, si $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ alors $A^{n+1} = P\,D^{n+1}\,P^{-1}$.
$A^{n+1} = A^n \times A = P\,D^n\,P^{-1}$
or $P^{-1}\,A\,P = D$ donc $P\,P^{-1}\,A\,P\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1}$ donc en remplaçant : $A^{n+1} = P\,D^n\,P^{-1}\,P\,D\,P^{-1} = P\,D^n\,D\,P^{-1}$
$A^{n+1} = P\,D^{n+1}\,P^{-1}$, la propriété est héréditaire.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0{,}9^n$.

$V_n = A^n\,V_0$ donc $V_n = \begin{pmatrix} -10\times 0{,}9^{n+1} + 10 & 10\times 0{,}9^{n+1} - 9 \\ -10\times 0{,}9^n + 10 & 10\times 0{,}9^n - 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5{,}1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-10\times 0{,}9^{n+1} + 10)\,5{,}1 + 5\,(10\times 0{,}9^{n+1} - 9) \\ (-10\times 0{,}9^n + 10)\,5{,}1 + 5\,(10\times 0{,}9^n - 9) \end{pmatrix}$.

donc $u_n = -51 \times 0{,}9^n + 51 + 50 \times 0{,}9^n - 45$ donc $u_n = 6 - 0{,}9^n$

3. $u_{10} = 6 - 0{,}9^{10}$ donc $u_{10} \approx 5{,}6513$ donc au bout de dix jours, il y aura donc environ 5 651 fourmis

4. $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

Le nombre de fourmis dans la colonie tendra 6000 individus.