

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(13 ; 3)$ est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p , alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

1. Soit x un entier naturel.

Démontrer que si $x \equiv a [7]$ et $x \equiv a [19]$, alors $x \equiv a [133]$.

2. a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.

Démontrer que $a^6 \equiv 1 [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1 [7]$.

En déduire que $(a^{25})^g \equiv a [7]$.

- b. On suppose que a est un multiple de 7.

Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [7]$.

- c. On admet que pour tout entier naturel a , $(a^{25})^g \equiv a [19]$.

Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leq a \leq 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A , est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A , l'entier r tel que $a^{25} \equiv r [133]$ avec $0 \leq r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1 [133]$ avec $0 \leq r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a [133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants :

128 59.

Décoder ce message.

CORRECTION

Partie A

1. $25 \times 13 = 325$ et $108 \times 3 = 324$ donc $25 \times 13 - 108 \times 3 = 1$ le couple $(13 ; 3)$ est solution de l'équation (E).

2.
$$\begin{cases} 25x - 108y = 1 \\ 25 \times 13 - 108 \times 3 = 1 \end{cases}$$
 donc par différence membre à membre :

$$25(x - 13) - 108(y - 3) = 0$$

$25(x - 13) = 108(y - 3)$, $x - 13$ est un entier relatif donc 25 divise 108 or 25 et 108 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 25 divise $y - 3$ donc $y - 3 = 25k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

En remplaçant dans $25(x - 13) = 108(y - 3)$ alors $x - 13 = 108k$

donc $x = 108k + 13$ et $y = 25k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est :

$$\{(108k + 13 ; 25k + 3), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Partie B

1. si $x \equiv a$ [7] et $x \equiv a$ [19], alors 7 divise $x - a$ et 19 divise $x - a$ or 7 et 19 sont premiers entre eux donc 7×19 divise $x - a$ (théorème de Gauss)

donc $x \equiv a$ [133].

2. a. 7 est un nombre premier et a est un entier non divisible par 7, alors (théorème de Fermat) $a^6 \equiv 1$ [7].

$108 = 6 \times 18$ donc si $a^6 \equiv 1$ [7], alors $(a^6)^{18} \equiv 1^{18}$ [7] soit $a^{108} \equiv 1$ [7].

$a^{25g - 108c} = a^1$ donc $a^{25g} = a \times a^{108c}$ donc $(a^{25})^g \equiv a \times (a^{108})^c$ [7]

or $a^{108} \equiv 1$ [7] donc $(a^{108})^c \equiv 1$ [7] donc $(a^{25})^g \equiv a$ [7]

b. Si a est un multiple de 7 alors $a \equiv 0$ [7] donc $(a^{25})^g \equiv 0$ [7]
donc $(a^{25})^g \equiv a$ [7].

c. Pour tout entier naturel a , $(a^{25})^g \equiv a$ [19] soit $x = (a^{25})^g$.

D'après la question B. 1. si $x \equiv a$ [7] et $x \equiv a$ [19], alors $x \equiv a$ [133]

donc $(a^{25})^g \equiv a$ [133].

Partie C

1. $a^{25} \equiv r$ [133] et $r^{13} \equiv r_1$ [133] donc $(a^{25})^{13} \equiv r_1$ [133]

or $25 \times 13 - 108 \times 3 = 1$ donc d'après la partie B, si $g = 13$ alors, pour tout entier naturel a , $(a^{25})^{13} \equiv a$ [133] donc $r_1 \equiv a$ [133].

2. $r = 128$ donc $r_1 \equiv 128^{13}$ [133]

$128 \equiv -5$ [133] donc $128^2 \equiv 25$ [133] donc $128^3 \equiv 125$ [133]

soit $128^3 \equiv -8$ [133]

$128^6 \equiv 36$ [133] donc $128^{12} \equiv 36^2$ [133]

$128^{12} \equiv 1296$ [133] or $1296 = 133 \times 10 - 34$ donc $128^{12} \equiv -34$ [133]

$128^{13} \equiv -34 \times (-5)$ [133]

$128^{13} \equiv 170$ [133] soit $128^{13} \equiv 37$ [133]

$b = 59$ donc $b^2 = 3481 = 133 \times 26 + 23$ donc $b^2 \equiv 23$ [133]

$b^4 \equiv 23^2$ [133] or $23^2 = 529 = 133 \times 4 - 23$ donc $b^4 \equiv -23$ [133]

$b^8 \equiv 23^2$ [133] donc $b^8 \equiv -23$ [133]

$b^{12} = b^8 \times b^4$ donc $b^{12} \equiv -23 \times (-23)$ [133] donc $b^{12} \equiv -23$ [133]

$b^{13} = b^{12} \times b$ donc $b^{13} \equiv -23 \times 59$ [133]

$-23 \times 59 = -133 \times 11 + 110$ donc $b^{13} \equiv 110$ [133] soit $b \equiv 110$ [133]