1. Un nombre entier naturel inférieur à 150 n'est divisible par aucun des 6 premiers nombres premiers. Est-il premier ?

$n \leq 150$ donc $12 \leq \sqrt{n} < 13$

Les 6 premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13

n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$ donc n est un nombre premier.

2. A l'aide du crible d'Eratosthène, déterminer tous les nombres premiers compris entre 1 et 150.

On écrit les nombres entiers de 1 à 150 et on élimine successivement les multiples stricts de 2.
On élimine ensuite successivement les multiples stricts de 3, puis de 5 puis de 7 puis de 11 puis de 13.
Les nombres restants ne sont divisibles par aucun des 6 premiers nombres premiers donc sont des nombres premiers

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	~~139~~	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Les nombres premiers inférieurs à 150 sont :
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149.

3. Déterminer les nombres entiers naturels possédant 6 diviseurs positifs et dont la décomposition en produit de facteurs premiers ne contient que 3 et 5 comme facteurs premiers.

$n = 3^{\alpha} \times 5^{\beta}$ avec α et β entiers naturels non nuls
Le nombre de diviseurs de n est $(\alpha + 1) (\beta + 1) = 6$
α et β entiers naturels non nuls donc $\alpha + 1 \geq 2$ et $\beta + 1 \geq 2$
$\alpha + 1$ est un diviseur de 6 différent de 1 donc $\alpha + 1 = 2$ ou 3 ou 6
$\alpha + 1 = 2$ donc $\beta + 1 = 3$ donc $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ donc $n = 3 \times 5^2 = 75$
$\alpha + 1 = 3$ donc $\beta + 1 = 2$ donc $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ donc $n = 3^2 \times 5 = 45$
$\alpha + 1 = 6$ donc $\beta + 1 = 1$ donc $\alpha = 5$ et $\beta = 0$ exclu
Les nombres entiers naturels possédant 6 diviseurs positifs et dont la décomposition en produit de facteurs premiers ne contient que 3 et 5 comme facteurs premiers sont 75 et 45.

4. n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 4. Démontrer que n est un carré parfait si, et seulement si, dans sa composition en produit de facteurs premiers les exposants sont tous pairs.

n est un carré parfait si et seulement si, il existe un entier naturel m tel que $n = m^2$
m est un entier naturel donc admet une décomposition en produit de facteurs premiers : il existe où p_1, p_2, … p_k nombres premiers avec $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et α_1, α_2, … α_k des entiers naturels non nuls. tels que $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ donc $m^2 = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$ donc $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$
Si n est un carré parfait alors, dans sa composition en produit de facteurs premiers les exposants sont tous pairs.

Réciproquement
avec les mêmes notations, si dans la composition de n en produit de facteurs premiers les exposants sont tous pairs, $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k} = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})^2$ donc n est un carré parfait