

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre exemple.

1. Pour tout complexe z , $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re}(z))^2$.
2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z , N d'affixe \bar{z} et P d'affixe $\frac{z^2}{z}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3. Pour tout nombre complexe z , si $|1 + iz| = |1 - iz|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.
4. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z + z'| = |z - z'|$, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.

CORRECTION

1. FAUX

si $z = 1 + i$ alors $(1 + i)^2 = 2i$ donc $\operatorname{Re}(z^2) = 0$ et $(\operatorname{Re}(z))^2 = 1$

2. VRAI

$$|\bar{z}| = |z| \text{ et } \left| \frac{z^2}{z} \right| = \frac{|z|^2}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \text{ donc } |\bar{z}| = \left| \frac{z^2}{z} \right| \text{ donc } ON = OM = OP$$

les points M d'affixe z , N d'affixe \bar{z} et P d'affixe $\frac{z^2}{z}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3. VRAI

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels alors $1 + iz = 1 + i(x + iy) = 1 - y + ix$ et $1 - iz = 1 - i(x + iy) = 1 + y - ix$

$$|1 + iz| = |1 - iz| \Leftrightarrow |1 + iz|^2 = |1 - iz|^2 \Leftrightarrow (1 - y)^2 + x^2 = (1 + y)^2 + (-x)^2 \Leftrightarrow 1 - 2y + y^2 + x^2 = 1 + 2y + y^2 + x^2 \Leftrightarrow y = 0$$

4. VRAI

$$|z + z'| = |z - z'| \Leftrightarrow |z + z'|^2 = |z - z'|^2 \Leftrightarrow (x + x')^2 + (y + y')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 \Leftrightarrow 4xx' + 4yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0 \Leftrightarrow \text{les droites (OM) et (OM')} \text{ sont perpendiculaires.}$$