

Examen du 23 juin 2009

Durée : 3 heures

Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits.
Un barème indicatif est indiqué entre parenthèses à la suite de chaque question.
La correction prendra en compte la clarté de vos dessins et de vos justifications.

Lentille plan-convexe

On s'intéresse à une lentille en verre dont la première interface (air-verre) est plane et dont la seconde interface (verre-air) forme un arc de cercle de rayon R et de centre C , comme indiqué sur la figure 1. Le point O est placé sur la seconde interface, au centre de la lentille, et l'axe de symétrie OC est appelé "axe optique" de la lentille. L'objectif de ce problème est d'analyser de façon complète la trajectoire des rayons lumineux, afin de démontrer une propriété fondamentale des lentilles : la capacité à produire des images.

On commence par étudier le cas d'un rayon lumineux parallèle à l'axe optique, incident sur la lentille avec un paramètre d'impact d . L'angle d'incidence du rayon lumineux sur l'interface verre-air est noté i , tandis que l'angle de réfraction à la sortie de cette interface est noté r . Le point H est le point situé sur l'axe optique à la verticale du point de sortie P . L'épaisseur de la lentille, notée e , est l'épaisseur mesurée au niveau du point O .

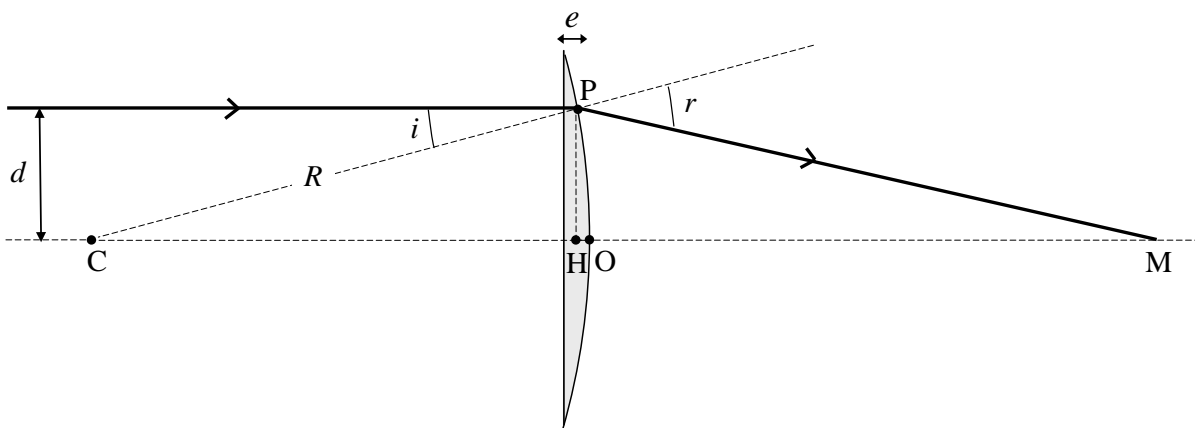


Figure 1 : Lentille mince - cas d'un rayon incident parallèle à l'axe optique.

A) Approximation de la lentille mince et approximation des petits angles

1) Exprimez les distances CH et HO en fonction de R et i . Déduisez-en la relation entre l'épaisseur e de la lentille et l'angle d'incidence maximal possible, i_{max} . Si e est égal à $R/20$, estimez l'angle maximal i_{max} en utilisant la table de la fonction cosinus, donnée à la fin de l'énoncé. (1.5 points)

2) Donnez le développement limité au premier ordre de la fonction sinus, pour un angle α mesuré en radians et considéré petit devant l'unité. Tracez la fonction sinus pour des angles entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ radians, en faisant apparaître également la courbe du développement limité au premier ordre. Y a-t-il un terme du second ordre dans le développement limité de la fonction sinus? Pourquoi? (1.5 points)

Dans toute la suite du problème (sauf mention explicite), vous vous placerez dans le cadre de *l'approximation de la lentille mince*, c'est-à-dire que vous négligerez l'épaisseur e (et donc la distance HO) devant le rayon de courbure R . Vous vous placerez également dans le cadre de *l'approximation des petits angles*: vous remplacerez le sinus d'un angle par son développement limité au premier ordre.

B) Distance focale

3) Exprimez les angles i puis r en fonction de d , R , et n l'indice optique du verre. (1 point)

4) Exprimez la distance OM à laquelle le rayon réfracté atteint l'axe central, en fonction de la déviation angulaire $r - i$. Faites un dessin pour illustrer votre raisonnement, en mettant en évidence cette déviation angulaire. Montrez que $OM=R/(n-1)$, puis commentez cette dernière formule : la dépendance de OM en fonction de R et n vous paraît-elle raisonnable ? (2 points)

5) Pourquoi peut-on dire que M est le "point focal" du système? Faites un dessin pour illustrer votre réponse. (1 point)

6) Pour la suite du problème la distance OM est appelée "distance focale" de la lentille et est notée f . Sachant que l'indice du verre utilisé est $n = 1.5$, quelle est la distance focale d'une lentille dont le rayon de courbure est de 10 cm? (0.5 points)

7) En pratique, où doit être placée une source lumineuse ponctuelle, pour qu'elle émette des rayons qui soient incidents sur la lentille comme indiqué sur votre dessin de la question 5 ? Justifiez votre réponse. (0.5 points)

8) Expliquez ce qui se passerait, si la lentille était beaucoup plus épaisse, pour des rayons lumineux ayant un paramètre d'impact important. A moins de rentrer dans des calculs complexes, il est difficile de prédire le trajet exact des rayons : vous vous contenterez d'indiquer qualitativement quelles sont les deux principales possibilités. Choisissez l'une d'elles et réalisez un dessin qui reprend celui de la question 5, mais en y ajoutant des rayons de paramètre d'impact élevé. Dans quelle mesure peut-on encore parler de point focal et de distance focale pour une lentille épaisse? (1.5 points).

C) Plan focal

On étudie maintenant le cas de rayons lumineux parallèles entre eux mais incidents sur la lentille avec un angle β par rapport à son axe optique (figure 2).

9) Expliquez pourquoi, lorsqu'ils se propagent à l'intérieur de la lentille, les différents rayons lumineux restent parallèles entre eux. Donnez la valeur de l'angle β' , dans le verre, entre ces rayons et l'axe optique de la lentille. On considère que les angles mis en jeu restent petits et on conserve donc l'approximation décrite plus haut. (0.5 points)

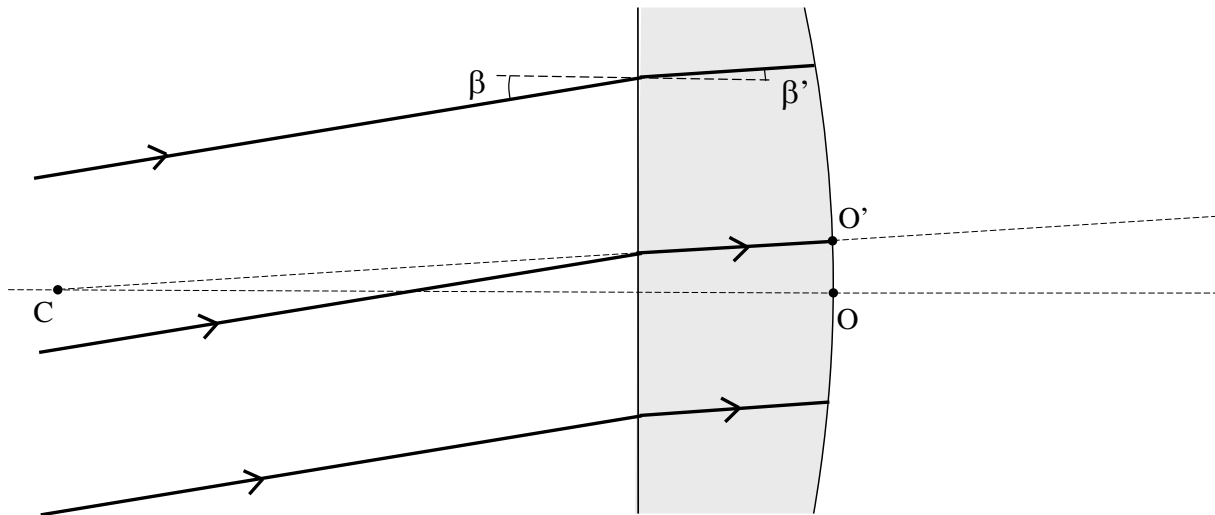


Figure 2 : Cas de rayons incidents non-parallèles à l'axe optique.

10) Sur la figure 2, le point O' a été choisi de façon à ce que le rayon lumineux passant par ce point soit, dans le verre, superposé à l'axe $O'C$. En sortant de la lentille au point O' , ce rayon lumineux subira-t-il une déviation? Justifiez votre réponse. (0.5 points)

11) Par un argument de symétrie, montrez que tous les rayons lumineux seront focalisés en un point M' . Illustrez votre réponse par un dessin. Que vaut la distance $O'M'$? Si on se limite à des petits angles β , que peut-on dire de la position du point M' par rapport à M ? (2 points).

12) Pourquoi appelle-t-on "plan focal" du système le plan perpendiculaire à l'axe optique et situé à la distance f de la lentille? (0.5 points)

D) Le modèle de la lentille "idéale"

13) Le rayon passant par O' sort de la lentille avec un angle différent de l'angle d'entrée β ; c'est également le cas pour presque tous les rayons sortant de la lentille. Montrez qu'en revanche le rayon lumineux passant par O ressort de la lentille avec le même angle que celui d'entrée. Vous justifierez rigoureusement votre réponse. (1 point)

14) Réalisez un dessin soigneux du type de la figure 2, illustrant la trajectoire de plusieurs rayons parallèles et incidents avec l'angle β , en mettant en évidence le rayon passant par O et celui passant par O' . (1 point)

15) En choisissant le rayon lumineux qui vous convient pour ce calcul, déterminez la distance MM' en fonction de f et β . (0.5 points)

16) Pour des petits angles et dans la limite d'une lentille "infiniment" mince, que peut-on dire du trajet du rayon lumineux passant par O ? (0.5 points)

17) La figure 3 résume le trajet des rayons lumineux dans le cas d'une lentille idéale (c'est-à-dire une lentille très mince, et pour des angles petits). Quelles sont les deux règles simples qui ont permis de tracer ces rayons, et qui permettent de prédire la trajectoire de n'importe quel rayon? (0.5 points)

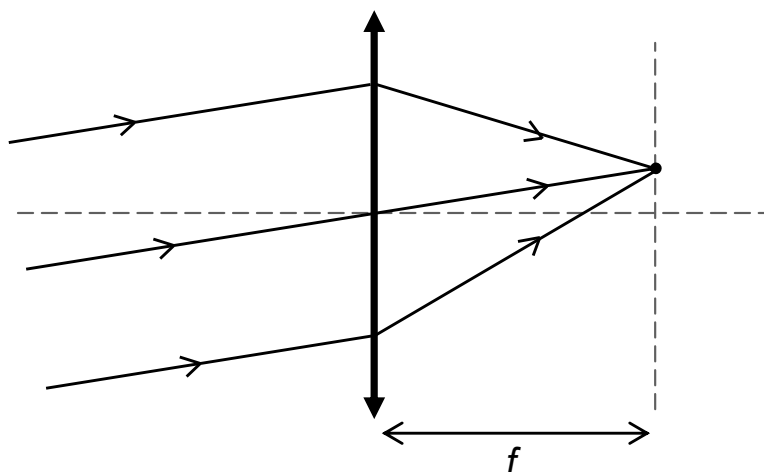


Figure 3 : Propagation des rayons pour une lentille idéale. Le segment avec les flèches symbolise de façon standard une lentille mince convergente.

E) Image d'un objet lointain

On oriente vers la Lune l'axe optique d'une lentille idéale, dont la distance focale est de 50 cm, et on observe la lumière projetée sur une feuille de papier (on se place bien sûr dans l'obscurité pour ne pas être perturbé par d'autres sources de lumière).

18) Pourquoi peut-on affirmer que la lentille produit une image de la Lune? Vous justifierez votre réponse de façon rigoureuse. De quel type d'image s'agit-il? Où doit-on placer l'écran pour observer cette image? (1.5 points)

19) Déterminez le rayon de l'image projetée, sachant que la Lune a un rayon apparent de 4.5 milliradians (angle mesuré depuis la Terre entre le centre et le bord de la Lune). (1.5 points)

20) Si une grosse rayure apparaît sur la lentille, comment cela affecte-t-il l'image observée sur la feuille de papier? (1 point)

Annexe : table des cosinus

Angle	Cosinus	Angle	Cosinus	Angle	Cosinus	Angle	Cosinus
0°	1.000	25°	0.906	50°	0.643	75°	0.259
5°	0.996	30°	0.866	55°	0.574	80°	0.174
10°	0.985	35°	0.819	60°	0.500	85°	0.087
15°	0.966	40°	0.766	65°	0.423	90°	0.000
20°	0.940	45°	0.707	70°	0.342		