On sait calculer les nombres $\sqrt{1+\sqrt{1}}$ et $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ écrits respectivement avec deux et trois racines carrées.

On va s'intéresser ici au nombre $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ écrit avec une infinité de racines carrées.

Pour cela on étudie la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ pour tout entier naturel n .

- Déterminer par le calcul le nombre obtenu lorsqu'il n'y a que deux racines, puis trois racines.
- Expliquer pourquoi l'équation $x = \sqrt{1+x}$ admet une solution positive. On note φ cette solution et elle est appelée le nombre d'or.
- Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\varphi \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{3}(u_n - \varphi)$
- En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n - \varphi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- Quelle est la limite de la suite (u_n) ? On montre ainsi que $\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$.
- Déterminer une valeur approchée de φ à 10^{-10} près.

CORRECTION

1. $\sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{2}$ et $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, en valeur approchées : $\sqrt{1+\sqrt{1}} \approx 1,414$ et $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} \approx 1,554$

2. Si $x = \sqrt{1+x}$ comme $\sqrt{1+x} \geq 0$ alors $x \geq 0$

$x = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x \geq 0$ et $x^2 = 1+x \Leftrightarrow x \geq 0$ et $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi \approx 1,618$

L'équation $x = \sqrt{1+x}$ admet une solution positive.

3. Initialisation : $u_0 = 1, u_1 = \sqrt{2}$ donc $\varphi \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $\varphi \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$, alors $\varphi \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2$.

La fonction $f : x \rightarrow \sqrt{1+x}$ est croissante sur $[-1; +\infty[$ donc si $\varphi \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$, alors $f(\varphi) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(2)$

or $f(\varphi) = \varphi$ et $f(2) = \sqrt{3}$ donc $f(2) \leq 2$

$\varphi \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq 2$ de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\varphi \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2$.

La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $\varphi \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

La suite (u_n) est décroissante minorée par φ donc converge vers une limite ℓ comprise entre φ et 2

4. $u_{n+1} - \varphi = \sqrt{1+u_n} - \varphi = \frac{(\sqrt{1+u_n} - \varphi)(\sqrt{1+u_n} + \varphi)}{\sqrt{1+u_n} + \varphi}$ donc $u_{n+1} - \varphi = \frac{1+u_n - \varphi^2}{u_{n+1} + \varphi}$

or $\varphi^2 = 1 + \varphi$ donc $1 - \varphi^2 = -\varphi$ donc $u_{n+1} - \varphi = \frac{u_n - \varphi}{u_{n+1} + \varphi}$

$\varphi \leq u_{n+1} \leq 2$ donc $u_{n+1} + \varphi \geq 2\varphi \geq 3$ donc $\frac{1}{u_{n+1} + \varphi} \leq \frac{1}{3}$

Pour tout entier n , $u_n - \varphi \geq 0$ donc $0 \leq \frac{u_n - \varphi}{u_{n+1} + \varphi} \leq \frac{1}{3}(u_n - \varphi)$ donc $0 \leq u_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{3}(u_n - \varphi)$

5. Initialisation : $u_0 = 1$, et $1 \leq \varphi \leq 2$ donc $0 \leq u_0 - \varphi \leq 1$ donc si $n = 0$, $0 \leq u_n - \varphi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $0 \leq u_n - \varphi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, alors $0 \leq u_{n+1} - \varphi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$$0 \leq u_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{3}(u_n - \varphi)$$

$$u_n - \varphi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

donc en multipliant la dernière par $\frac{1}{3}$,

$$0 \leq u_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{3}(u_n - \varphi)$$
$$\frac{1}{3}(u_n - \varphi) \leq \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

donc $0 \leq u_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{3}(u_n - \varphi) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ soit $0 \leq u_{n+1} - \varphi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n - \varphi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \varphi = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \varphi$.

7. Pour obtenir une valeur approchée de φ à 10^{-10} près, il suffit de chercher pour quelle valeur de n , $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-10}$ soit quelle valeur de n , $3^n \geq 10^{10}$

$n \ln 3 \geq 10 \ln 10$ donc $n \geq 10 \frac{\ln 10}{\ln 3}$ donc $n \geq 21$

u_{21} est une valeur approchée de φ à 10^{-10} près, $u_{21} \approx 1,6180339888$