**Liban mai 2011**
**EXERCICE 1 5 points**
**Commun à tous les candidats**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les trois points :

$$A (1 ; 2 ; -1),\ B (-3 ; -2 ; 3) \text{ et } C (0 ; -2 ; -3)$$

**1. a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

**b.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; − 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC).

**2.** Soit $(P)$ le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$.
Démontrer que les plans (ABC) et $(P)$ sont perpendiculaires.

**3.** On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, − 1) et (C, 2).

**a.** Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan $(P)$.

**c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

**d.** Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan $(P)$ avec la droite (CG).

**4.** Démontrer que l'ensemble $(S)$ des points $M$ de l'espace tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \right\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.

**5.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan $(P)$ et de la sphère $(S)$.

**EXERCICE 2 3 points**
**Commun à tous les candidats**

*Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.*
*Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
*Il sera attribué* 0,5 *point si la réponse est exacte,* 0 *sinon.*

**1.** Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques $M_1$ et $M_2$. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.
D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur $M_1$ et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur $M_2$ l'ont choisi de couleur blanche.
On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

**a.** La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur $M_2$ de couleur noire est :

**Réponse A :** $\frac{3}{5}$ **Réponse B :** $\frac{4}{5}$ **Réponse C :** $\frac{3}{50}$ **Réponse D :** $\frac{6}{25}$

**b.** La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

**Réponse A :** $\frac{21}{50}$ **Réponse B :** $\frac{33}{50}$ **Réponse C :** $\frac{3}{5}$ **Réponse D :** $\frac{12}{25}$

**c.** Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque $M_2$ est :

**Réponse A :** $\frac{4}{11}$ **Réponse B :** $\frac{6}{25}$ **Réponse C :** $\frac{7}{11}$ **Réponse D :** $\frac{33}{50}$

**2.** Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues. Les boules sont indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

**a.** La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

**Réponse A :** $\frac{11}{81}$ **Réponse B :** $\frac{2}{7}$ **Réponse C :** $\frac{5}{84}$ **Réponse D :** $\frac{4}{63}$

**b.** La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

**Réponse A :** $\frac{2}{7}$ **Réponse B :** $\frac{1}{7}$ **Réponse C :** $\frac{1}{21}$ **Réponse D :** $\frac{79}{84}$.

**c.** On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.
Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

**Réponse A :** 76 **Réponse B :** 71 **Réponse C :** 95 **Réponse D :** 94

**EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire**
**Partie A : Restitution organisée de connaissances**
**Prérequis :** On suppose connu le résultat suivant :
Quels que soient les nombres complexes non nuls $z$ et $z'$, $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2\pi$ près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls $z$ et $z'$, on a : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2\pi$ près.

**Partie B**
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - i \text{ et } z_B = 2 + \sqrt{3} + i.$$

**1.** Déterminer le module et un argument de $z_A$.

**2. *a.*** Écrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

***b.*** Montrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

***c.*** En déduire la forme exponentielle de $z_B$.

**3.** On note $B_1$ l'image du point B par la rotation $r$ de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.

***a.*** Déterminer l'affixe du point $B_1$.

***b.*** En déduire que le point $B_1$ est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O ; \vec{u})$.

Soit M un point du plan. On note $M_1$ l'image du point M par la rotation $r$ et M' le symétrique du point $M_1$ par rapport à l'axe $(O ; \vec{u})$.
On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que M' = M.

***a.*** Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

***b.*** Soit M un point distinct du point O.

Son affixe $z$ est égale à $\rho e^{i\theta}$ où $\rho$ est un réel strictement positif et $\theta$ un nombre réel.

Montrer que l'affixe $z'$ du point M' est égale à $\rho e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel $\theta$ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

***c.*** Déterminer l'ensemble (E).

**EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**
**Partie A : Restitution organisée de connaissances**
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.
**Prérequis :** L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = a z + b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.
Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que A ≠ B et A' ≠ B' alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

**Partie B**

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo $2\pi$.

On note D le symétrique de A par rapport au point C.
On désigne par $s$ la similitude directe transformant D en C et C en B.

**1.** Déterminer le rapport et l'angle de la similitude $s$.

**2.** On appelle $\Omega$ le centre de la similitude $s$.

**a.** En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$, démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.

**b.** En déduire la nature du triangle $\Omega$DC.

**3.** On pose $\sigma = s \circ s$.

**a.** Quelle est la nature de la transformation $\sigma$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

**b.** Déterminer l'image du point D par la transformation $\sigma$.

**4.** Démontrer que le quadrilatère AD$\Omega$B est un rectangle.

**5.** Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.

**a.** Démontrer que l'écriture complexe de la similitude $s$ est : $z' = (1+ i)\, z + 2 - i$ où $z$ et $z'$ désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par $s$.

**b.** On note $x$ et $x'$, $y$ et $y'$ les parties réelles et les parties imaginaires de $z$ et $z'$.
Démontrer que $x' = x - y + 2$ et $y' = x + y - 1$

**c.** Soit J le point d'affixe 1 + 3 i.

Existe-t-il des points $M$ du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM'} . \overrightarrow{AJ} = 0$, M' désignant l'image du point M par $s$ ?

**EXERCICE 4 7 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$.

On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

**Partie A**

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

**2.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**3.** Montrer que $(C)$ admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à termes positifs définie par : $u_1 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

**1.** Démontrer que, pour tout réel $x$ positif, $\ln(1+x) \leq x$.

On pourra étudier la fonction $g$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.

**2.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

**3.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

**4.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln(n) \leq u_n$.

**5.** En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $u_n \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n-1}$.

**6. a.** Démontrer que, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

**b.** En déduire que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$

**7.** Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

**CORRECTION**

**EXERCICE 1**

**1. *a.*** $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 4 ; – 4 ; 4) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 1 ; – 4 ; – 2)
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

***b.*** $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 2 \times (-4) - 1 \times (-4) + 4 \times 1 = 0$ et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) - 1 \times (-4) + 4 \times (-2) = 0$
$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc le vecteur $\vec{n}$ (2 ; − 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC).

**2.** **L**e vecteur $\vec{n}\,'$ (1 ; 1 ; – 1) est un vecteur normal au plan (P) et le vecteur $\vec{n}$ (2 ; − 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC)
$\vec{n}\,'\,.\,\vec{n} = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$
Les vecteurs $\vec{n}\,'$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

**3. *a.*** Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).
G est le point de coordonnées $\left( \dfrac{x_A - x_B + 2\,x_C}{1-1+2} ; \dfrac{y_A - y_B + 2\,y_C}{1-1+2} ; \dfrac{z_A - z_B + 2\,z_C}{1-1+2} \right)$ soit (2 ; 0 ; – 5)
$\overrightarrow{CG}$ a pour coordonnées (2 ; 2 ; – 2) donc $\overrightarrow{CG} = 2\,\vec{n}\,'$ or le vecteur $\vec{n}\,'$ est un vecteur normal au plan (P) donc la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

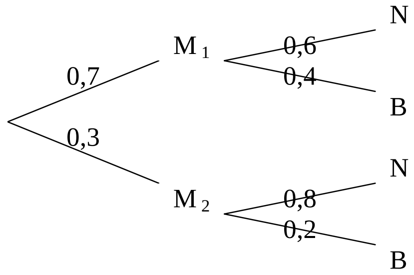
***c.*** Un point M (x ; y ; *z*) appartient à la droite (CG) si et seulement si, il existe un réel *t* tel que $\overrightarrow{CM} = t\,\vec{n}\,'$
Une représentation paramétrique de la droite (CG) est $\begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \\ z = -t - 3 \end{cases}$.

***d.*** Les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG) doivent vérifier : $\begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \\ z = -t - 3 \end{cases}$ et x + y − *z* + 2 = 0.
donc *t* + *t* – 2 + *t* + 3 + 2 = 0 donc 3 *t* + 3 = 0 soit *t* = – 1 donc H a pour coordonnées (– 1 ; – 3 ; – 2).

**4.** G est le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, − 1) et (C, 2) donc $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MG}$
$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \right\| = 12 \Leftrightarrow \left\| 2\,\overrightarrow{MG} \right\| = 12 \Leftrightarrow$ 2 MG = 12 ⇔ MG = 6.
L'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \right\| = 12$ est une sphère de centre G de rayon 6.

**5.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).
Calculons la distance du centre de la sphère au plan (P) : *d*(G, (P)) = $\dfrac{|\,2 + 0 - (-5) + 2\,|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Cette distance étant inférieure au rayon 6 de la sphère, alors (S) et (P) sont sécants selon un cercle, dont le centre est le projeté orthogonal de G sur le plan (P) donc le point H et son rayon *r* vérifie l'égalité de Pythagore : $r^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 6^2$ donc $r^2 = 36 - 27 = 9$ donc $r = 3$

**EXERCICE 2 3 points**




**1. *a*. Réponse D :** La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur $M_2$ de couleur noire est $0,3 \times 0,8 = 0,24 = \dfrac{6}{25}$

**1. *b*. Réponse D :** La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est : $p(M_1 \cap N) + p(M_2 \cap N)$

soit $p(N) = 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8 = 0,42 + 0,24 = 0,66 = \dfrac{33}{50}$

**1. *c*. Réponse A :** La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de marque $M_2$ sachant qu'il est de couleur noire est : $p_N(M_2) = \dfrac{p(M_2 \cap N)}{p(N)}$ soit $p_N(M_2) = \dfrac{0,3 \times 0,8}{0,66} = \dfrac{4}{11}$

**2. *a*.** **Réponse C :** On a $\dbinom{9}{3} = 84$ cas possibles. Si les trois boules de même couleur, on a obtenu soit 3 boules jaunes, soit 3 boules bleues. Le nombre de cas favorables est $\dbinom{4}{3} + \dbinom{3}{3} = 5$ donc $p = \dfrac{5}{84}$

***b*.** **Réponse A :** Le nombre de cas favorables est $4 \times 2 \times 3 = 24$ donc la probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est : $\dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7}$**.**

***c*.** **Réponse C :** La probabilité de tirer 3 boules jaunes est égale à $\dfrac{4}{84} = \dfrac{1}{21}$.

Donc la probabilité de ne pas avoir un tirage de 3 boules jaunes est égale à : $1 - \dfrac{1}{21} = \dfrac{20}{21}$.

La probabilité de ne pas avoir de tirage de 3 boules jaunes en $n$ tirages est donc égale à $\left(\dfrac{20}{21}\right)^n$

La probabilité de l'évènement contraire « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » est égale à $1 - \left(\dfrac{20}{21}\right)^n$.

Il faut donc résoudre l'inéquation : $1 - \left(\dfrac{20}{21}\right)^n \geq 0,99$ soit $\left(\dfrac{20}{21}\right)^n \leq 0,01$ donc $n \ln\left(\dfrac{20}{21}\right) \leq \ln 0,01$

$n \geq \dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\dfrac{20}{21}\right)}$ or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\dfrac{20}{21}\right)} \approx 94,4$ donc $n \geq 95$.

**EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire**

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Quels que soient les nombres complexes non nuls $z$ et $z'$,arg $(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2\pi$ près.

$\left(\dfrac{z}{z'}\right) \times z' = z$ donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) + \arg(z') = \arg(z)$ à $2\pi$ près soit $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2\pi$ près.

**Partie B**

**1.** $|z_A|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$ donc $z_A = \sqrt{2}$

$z_A = \sqrt{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1 - i$ donc $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ à $2\pi$ près.

**2. *a.*** $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2+\sqrt{3}+i}{1-i} = \dfrac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2+\sqrt{3}+i+(2+\sqrt{3})i-1}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}i$

***b.*** $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}i = (1+\sqrt{3})\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = (1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

***c.*** $z_B. = z_A(1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z_B = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$z_B = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

**3. *a.*** L'écriture complexe de la rotation de centre O d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ est $z' = z\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc l'affixe du point $B_1$ est $z_B\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

soit $\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{6}}\,e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}$

***b.*** $z_B = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $z_{B_1} = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}} = \overline{z_B}$ donc le point $B_1$ est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$.

**4. *a.*** O a pour image par la rotation le point O qui a pour symétrique par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$, le point O : le point O est donc invariant.

B a pour image par la rotation le point B1 qui a pour symétrique par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$, le point B : le point B est lui aussi invariant.

Les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

***b.*** Soit M un point distinct du point O. Son affixe $z$ est égale à $\rho\,e^{i\theta}$ où $\rho$ est un réel strictement positif et $\theta$ un nombre réel.

M d'affixe $\rho\,e^{i\theta}$ a pour image par la rotation le point $M_1$ d'affixe $\rho\,e^{i\theta} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = \rho\,e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$

Ce point $M_1$ a pour symétrique autour de l'axe $(O\,;\vec{u})$, le point de même module mais d'argument opposé soit $z' = \rho\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$

***c.*** On $a$ donc M = M' $\Leftrightarrow \rho\,e^{i\theta} = \rho\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6} - \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

L'ensemble (E) est donc la droite privée de O contenant tous les points d'argument $\dfrac{\pi}{12}$ à $\pi$ près, soit la droite (OB) privée de O.

**EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**
**Partie A : Restitution organisée de connaissances**
L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = a\,z + b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.
Il s'agit donc de déterminer, s'ils existent, $a$ et $b$ deux nombres complexes tels que $a \neq 0$ tels que $z_{A'} = a\,z_A + b$ et $z_{B'} = a\,z_B + b$

par différence membre à membre : $a\,(z_A - z_B) = z_{A'} - z_{B'}$, A ≠ B donc $z_A \neq z_B$ donc $a = \dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$

A' ≠ B' donc $z_{A'} - z_{B'} \neq 0$ donc $a \neq 0$.

$\begin{cases} z_{A'} = a\,z_A + b \\ z_{B'} = a\,z_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B\,z_{A'} = a\,z_B\,z_A + b\,z_B \\ z_{B'}\,z_A = a\,z_B\,z_A + b\,z_A \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $b = \dfrac{z_{A'}\,z_B - z_{B'}\,z_A}{z_A - z_B}$.

Si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que A ≠ B et A' ≠ B' alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

**Partie B**

**1.** Le triangle ABC est rectangle isocèle en A donc AB = AC = $a$ et BC = $a\sqrt{2}$

D est le symétrique de A par rapport au point C donc C est le milieu de [AD] donc AC = CD = $a$

$s$ transforme D en C et C en B donc le rapport de $s$ est $\dfrac{CB}{DC} = \sqrt{2}$

L'angle de la similitude $s$ est $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB})$ or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA}$ donc l'angle de la similitude $s$ est $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Le triangle ABC est rectangle isocèle direct donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{4}$ [2 π].

$s$ est la similitude directe de centre Ω inconnu, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

**2. *a.*** $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$, donc $DC^2 = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DC} = \Omega C^2 + \Omega D^2 - 2\,\overrightarrow{\Omega C}.\overrightarrow{\Omega D}$.

$s$ transforme D en C donc $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}) = \dfrac{\pi}{4}$ [2 π] et $\Omega C = \sqrt{2}\,\Omega D$ donc $DC^2 = \Omega C^2 + \Omega D^2 - 2\,\Omega C \times \Omega D \cos \dfrac{\pi}{4}$

$DC^2 = \Omega C^2 + \Omega D^2 - 2\,\Omega C \times \Omega D\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \Omega C^2 + \Omega D^2 - \Omega C \times \Omega D\,\sqrt{2}$ donc $DC^2 = \Omega C^2 + \Omega D^2 - \Omega C^2$ soit $DC^2 = \Omega D^2$.

***b.*** $DC^2 = \Omega D^2$ et $\Omega C = \sqrt{2}\,\Omega D$ donc $\Omega C^2 = DC^2 + \Omega D^2$ donc le triangle ΩDC est rectangle isocèle en Ω.

**3. *a.*** σ est la composée de deux similitudes directes de même centre Ω donc σ est une similitude directe de centre Ω ; de rapport le produit des rapports donc 2 et d'angle la somme des angles donc $\dfrac{\pi}{2}$.

***b.*** $s$(D) = C et $s$(C) = B donc $s$ o $s$ (D) = B, l'image du point D par la transformation σ est le point B.

**4.** l'image du point D par la transformation σ est le point B donc $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega B}) = \dfrac{\pi}{2}$ [2 π]

Le quadrilatère ADΩB $a$ trois angles droits : les angles $\widehat{BAD}$, $\widehat{AD\Omega}$, et $\widehat{B\Omega D}$ donc est un rectangle.

**5.** Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.

***a.*** $s$ est une similitude directe donc son écriture complexe est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $a$ et $b$ complexes, $a \neq 0$

$s$ transforme D en C et C en B donc $\begin{cases} i = a\,2\,i + b \\ 1 = a\,i + b \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $a$ i = i – 1 donc $a$ i ( – i ) = (i – 1) (– i)

$a = 1 + i$ donc $b = 1 - a\,i = 1 - (1 + i)\,i$ soit $b = 2 - i$.
L'écriture complexe de la similitude $s$ est : $z' = (1 + i)\,z + 2 - i$

***b.*** On note $x$ et $x'$, $y$ et $y'$ les parties réelles et les parties imaginaires de $z$ et $z'$.
$z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$, l'écriture complexe de la similitude $s$ est : $z' = (1+ i)\,z + 2 - i$
donc $x' + i\,y' = (1 + i)\,(x + i\,y) + 2 - i \Leftrightarrow x' + i\,y' = x + i\,y + i\,x - y + 2 - i \Leftrightarrow x' + i\,y' = x - y + 2 + i\,(y + x - 1) \Leftrightarrow x' = x - y + 2$ et $y' = x + y - 1$ (en égalant parties réelles et parties imaginaires).

***c.*** $\overrightarrow{AM'}$ a pour coordonnées $(x' ; y')$ et $\overrightarrow{AJ}$ a pour coordonnées (1 ; 3)
$\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AJ} = 0 \Leftrightarrow x' + 3y' = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 + 3(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4\,x + 2\,y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\,(2\,x + y) = 1$

1 est un nombre impair or $x$ et $y$ sont des entiers relatifs donc 2 (2 $x$ + $y$) est un nombre pair. Il est donc impossible d'avoir 2 (2 $x$ + $y$) = 1, avec $x$ et $y$ entiers relatifs. Il n'existe pas de point $M$ du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM'} . \overrightarrow{AJ} = 0$, M' désignant l'image du point M par $s$.

**EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats**

**Partie A**

**1.** $f'(x) = 1 - e^{-x}$, si $x \geq 0$ alors $-x \leq 0$ donc $e^{-x} \leq 1$ donc $f'(x) \geq 0$ sur $[ 0 ; + \infty [$, $f$ est croissante sur $[ 0 ; + \infty [$.

**2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**3.** $f(x) - x = e^{-x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ donc (C ) admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x$.

**Partie B**

On considère la suite ($un$)$n$>1 à termes positifs définie par : $u_1 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$.

**1.** $g(x) = x - \ln(1 + x)$ donc $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$ donc pour tout $x \geq 0$, $g'(x) \geq 0$ donc $g$ est croissante sur $[ 0 ; + \infty [$.

$g(0) = 0$ donc sur $[ 0 ; + \infty [$, $g(x) \geq 0$ et pour tout réel $x$ positif, $\ln(1 + x) \leq x$.

**2.** Pour tout réel $x$ positif, $\ln(1 + x) \leq x$ donc pour $x = \dfrac{1}{n}$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$ soit $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$

donc $\ln(n + 1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$ soit pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln(n + 1) \leq \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

**3.** pour tout entier naturel $n$ non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + e^{-\ln(n)} = \ln(n) + \dfrac{1}{e^{\ln(n)}} = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

**4.** $u_1 = 0$ donc $u_1 \geq \ln 1$, la propriété est vraie pour $n = 1$

Montrons l'hérédité c'est-à-dire que pour tout entier $n$ non nul, si $\ln(n) \leq u_n$ alors $\ln(n + 1) \leq u_{n+1}$.

$u_{n+1} = f(u_n)$ or $\ln(n) \leq u_n$, $f$ est croissante sur $[ 0 ; + \infty [$ donc $f[\ln(n)] \leq f(u_n)$

$f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leq u_{n+1}$ or $\ln(n + 1) \leq \ln(n) + \dfrac{1}{n}$ donc $\ln(n + 1) \leq \ln(n) + \dfrac{1}{n} \leq u_{n+1}$

soit $\ln(n + 1) \leq u_{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout entier $n$ non nul.

**5.** pour tout entier $n$ non nul. $\ln(n) \leq u_n$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**6. *a.*** $1 \leq k - 1 \leq x \leq k$ donc $\dfrac{1}{k-1} \geq \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{k}$

pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{k}$, ces fonctions sont continues sur $[k - 1 ; k]$ donc : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\, dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx$.

pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a $\displaystyle\frac{1}{k}[k-(k-1)] \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx$ soit $\displaystyle\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx$.

***b.*** $\displaystyle\frac{1}{2} \leq \int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx$

$\displaystyle\frac{1}{3} \leq \int_{2}^{3} \frac{1}{x}\, dx$

…

$\displaystyle\frac{1}{n-1} \leq \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\, dx$ en additionnant les inégalités membre à membre $\displaystyle\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} \leq \int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx + ... \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\, dx$ soit

$\displaystyle\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} \leq \int_{1}^{n-1} \frac{1}{x}\, dx$ soit $\displaystyle\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} \leq [\ln x]_{1}^{n-1}$ donc $\displaystyle\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} \leq \ln(n-1)$

pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $u_n \leq 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n-1}$ donc $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$

**7.** Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

$n \geq 2$ donc $\ln(n) > 0$ donc $1 \leq \dfrac{u_n}{\ln(n)} \leq \dfrac{\ln(n-1)}{\ln(n)}$

$\ln(n-1) = \ln\left(n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et la fonction ln est continue sur $]0 ; +\infty[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = 1$

la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$ est telle que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $\dfrac{u_n}{\ln(n)}$ est compris entre deux suites qui admettent pour limite 1 donc d'après le théorème des « gendarmes » $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = 1$.