Exercice 1 4 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+1}$.

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. On a tracé, en annexe 1, la courbe C représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la droite D d'équation $y = x$.

a. Sur le graphique en annexe 1, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.

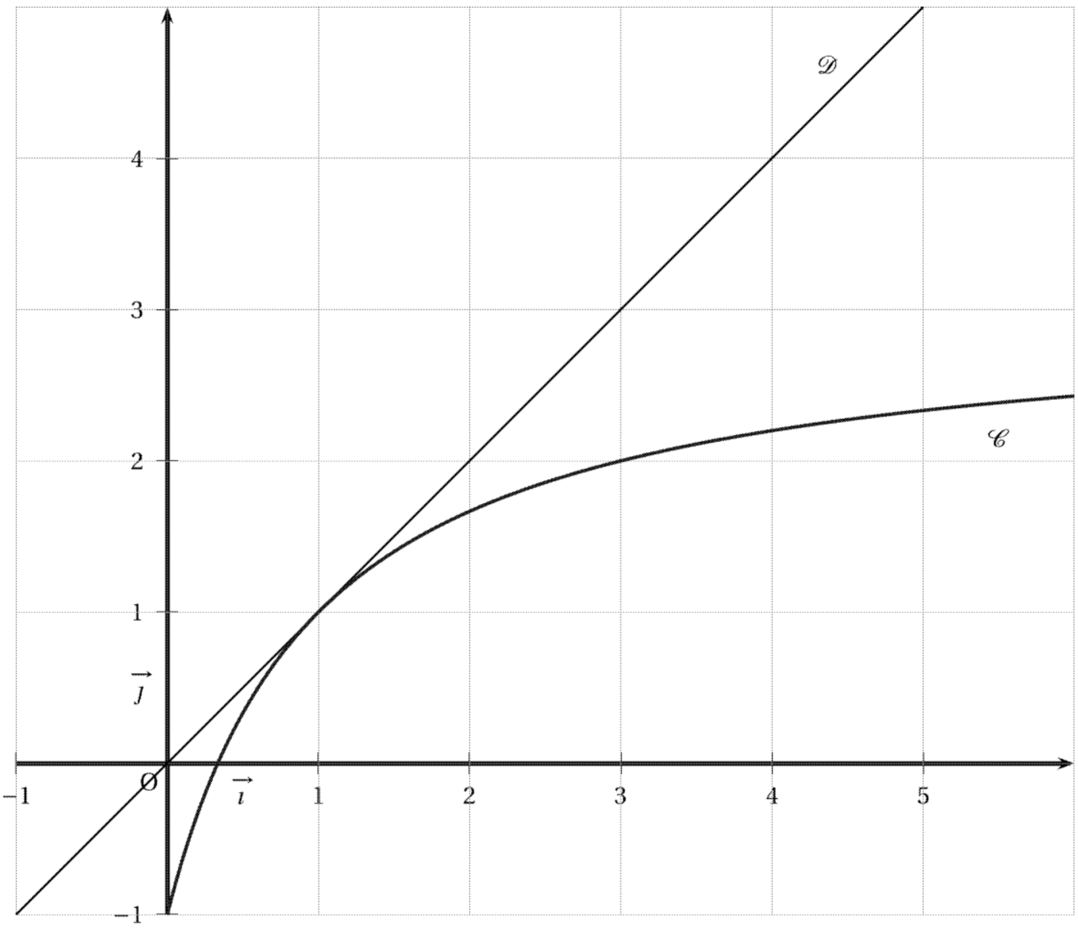
b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b.

a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leq u_n$.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.



Exercice 2 4 points Commun à tous les candidats

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

– V l'évènement : « le dé tiré est vert »

– R l'évènement : « le dé tiré est rouge »

– S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.

b. Calculer la probabilité $P(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

a. Démontrer que : $P(S_n) = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers. Démontrer que : $p_n = \dfrac{1}{2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 1}$.

c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geq 0{,}999$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 3 4 points Commun à tous les candidats

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x^2(1 - \ln x)$.

Partie A Étude de la fonction *g*

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Déterminer la limite de g en 0.

3. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

4. En utilisant les résultats précédents, étudier le signe de la fonction g sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

Partie B Représentation graphique et aire sous la courbe

Soit C la courbe représentative de la fonction g .

1. Tracer C dans un repère orthonormal ayant pour unité graphique 5 cm.

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1. La tracer sur le graphique.

3. Calculer l'aire en unités d'aire du domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Exercice 4 3 points Commun à tous les candidats

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D où : $z_A = 1 + 2\,\mathrm{i}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $z_D = \overline{z_C}$.

a. Placer les points A et B dans le repère $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

b. Calculer $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

c. En déduire la nature du triangle ABC.

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

4. Construire les points C et D dans le repère $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. Expliquer la construction proposée.

Exercice 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(-1\,;-1\,;1)$ et les droites D et D' de représentations paramétriques : D : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ D' : $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 2 \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite D ».

Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite D passant par le point O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$ ».

Proposition 3 : « Les droites D et D' sont orthogonales ».

Proposition 4 : « Les droites D et D' sont coplanaires ».

Proposition 5 : « La distance du point A au plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ est $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

Exercice 5 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Proposition 1 : « Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2 ».

Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

Proposition 2 : « S'il existe un couple de nombres entiers relatifs (u, v) tel que $ua + vb = 3$, alors PGCD$(a, b) = 3$ ».

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Proposition 3 : « L'entier $n^2 - 3n - 10$ n'est jamais un nombre premier ».

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le cône Γ d'équation $x^2 + y^2 = 5z^2$. Soit A le point de coordonnées $(-2\,;-1\,;\gamma°)$.

Proposition 4 : « Il existe un unique réel γ tel que le point A appartient au cône Γ ».

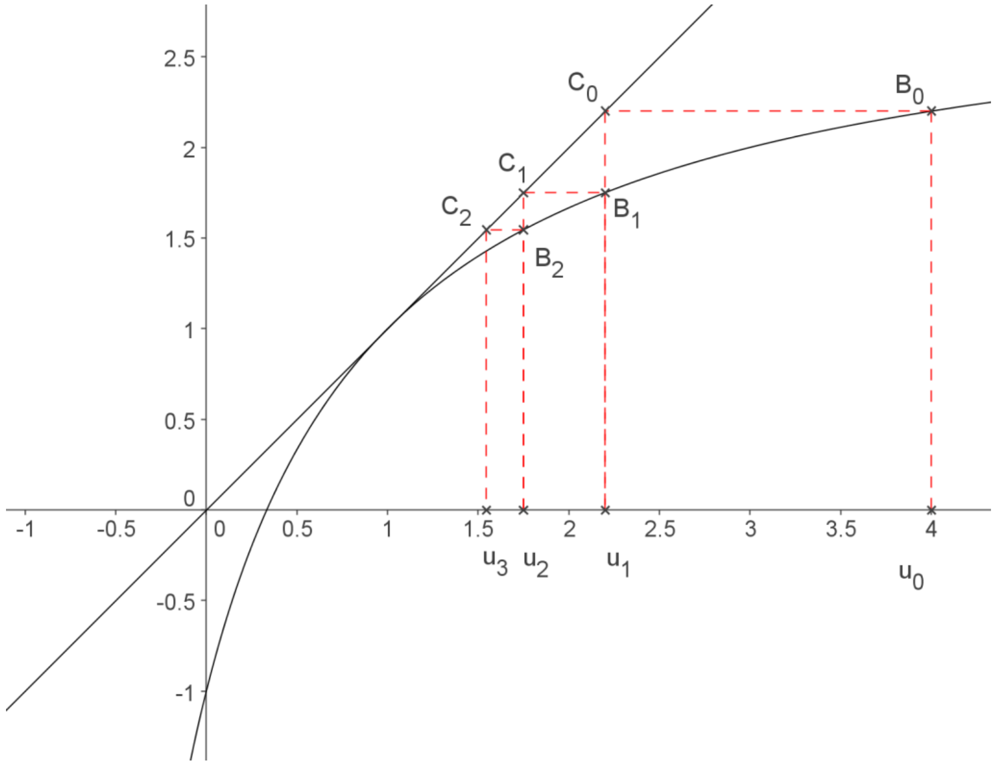
On coupe le cône Γ d'équation $x^2 + y^2 = 5z^2$ par le plan P_a d'équation $x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 5 : « Cette intersection peut être la réunion de deux droites ».

CORRECTION

Exercice 1 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.*



b. La suite (u_n) semble être décroissante et converger vers 1

2. *a.* Montrons par un raisonnement par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+1}$ donc $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}$ donc la fonction f est croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Initialisation : $u_0 = 4$ donc $u_0 > 4$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que la propriété est héréditaire : pour tout n de N si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} > 1$

$u_n > 1$ or la fonction $f : x \to 3 - \dfrac{4}{x+1}$ est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$ donc $f(u_n) > f(1)$ soit $u_{n+1} > 1$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de N.

b. la fonction f est croissante sur $]-1\,;+\infty[$ donc sur $[0\,;+\infty[$.

Initialisation : $u_0 = 4$ et $u_1 = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$ donc $u_1 < u_0$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que la propriété est héréditaire : pour tout n de N si $u_{n+1} < u_n$ alors $u_{n+2} < u_{n+1}$.

La fonction $f : x \to 3 - \dfrac{4}{x+1}$ est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$ donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ soit $u_{n+2} < u_{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de N.

c. La suite (u_n) est décroissante minorée par 1 donc la suite (u_n) est convergente.

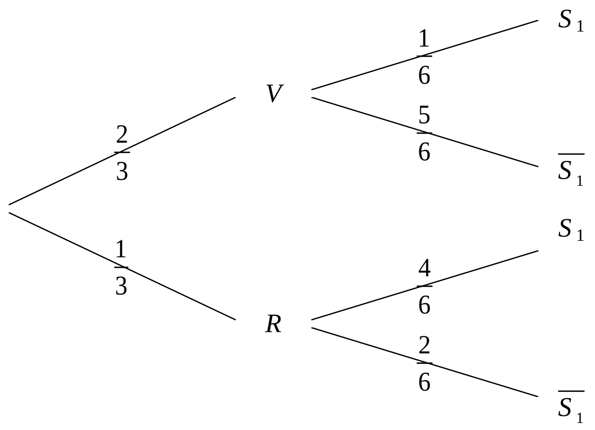
$u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de N, $u_n \in [0\,;+\infty[$, la suite (u_n) est convergente et sa limite est supérieure ou égale à 1, la fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ donc la limite de (u_n) est solution de $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow 3 - \dfrac{4}{x+1} = x \Leftrightarrow 3 - x = \dfrac{4}{x+1} \Leftrightarrow (3-x)(x+1) = 4 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 2 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. $P(S_1) = P(V \cap S_1) + P(R \cap S_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$

2. *a.* Deux cas :

le dé vert est choisi ($p = \frac{2}{3}$), sachant que le dé vert est choisi, la probabilité d'obtenir le 6 à chacun des n lancers est $p' = \left(\frac{1}{6}\right)^n$ donc la probabilité de choisir le dé vert et d'obtenir 6 à chacun des n lancers est $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$

le dé rouge est choisi ($P = \frac{1}{3}$), sachant que le dé rouge est choisi, la probabilité d'obtenir le 6 à chacun des n lancers est $P' = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc la probabilité de choisir le dé rouge et d'obtenir 6 à chacun des n lancers est $\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

donc $P(S_n) = P(S_n \cap V) + P(S_n \cap R)$

$P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. $p_n = \dfrac{p(S_n \cap R)}{p(S_n)}$ or $P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^n = \dfrac{2}{3 \times 6^n} + \dfrac{4^n}{3 \times 6^n}$.

$6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$ donc $3 \times 6^n = 2^n \times 3^{n+1}$ donc $P(S_n) = \dfrac{2 + 4^n}{3^{n+1} \times 2^n}$

$P(S_n \cap R) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ donc $\dfrac{p(S_n \cap R)}{p(S_n)} = \dfrac{\frac{2^n}{3^{n+1}}}{\frac{2+4^n}{3^{n+1} \times 2^n}} = \dfrac{2^n}{\frac{2+4^n}{2^n}} = \dfrac{2^n \times 2^n}{2 + 4^n} = \dfrac{4^n}{2 + 4^n}$

$$p_n = \dfrac{4^n}{\left(2 \times \frac{1}{4^n} + 1\right) \times 4^n} = \dfrac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$$

c. $p_n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 1 \geq 0{,}999 \times \left(2 \times \frac{1}{4^n} + 1\right) \Leftrightarrow 1 \geq 1{,}998 \times \frac{1}{4^n} + 0{,}999$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}999 \geq 1{,}998 \times \frac{1}{4^n} \Leftrightarrow 0{,}001 \times 4^n \geq 1{,}998 \Leftrightarrow 4^n \geq 1\,998 \Leftrightarrow n \ln 4 \geq \ln 1\,998 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 1998}{\ln 4}$ or $\dfrac{\ln 1998}{\ln 4} \approx 5{,}4$ donc $n \geq 6$

le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geq 0{,}999$ pour tout $n \geq n_0$ est donc 6.

Exercice 3 4 points Commun à tous les candidats

Partie A Étude de la fonction g

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0$ or $g(x) = x^2 - x^2 \ln x$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$.

3. Sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, g est définie continue dérivable (produit de fonctions continues dérivables)

$$\begin{cases} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v(x) = 1 - \ln x & v'(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases} \text{ donc } g'(x) = 2x(1 - \ln x) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 2x(1 - \ln x) - x = x\,[\,2 - 2x \ln x - 1\,]$$

$g'(x) = x(1 - 2\ln x)$ or $x > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $1 - 2\ln x$.

$1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow 2\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{0,5}$.

x	0		$e^{0,5}$		e		$+\infty$
$1 - 2\ln x$			0				
$g'(x)$			0				
g	0	$\nearrow$	$0,5\,e$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

La fonction g est strictement croissante sur $]\,0\,;e^{0,5}\,[$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$, donc sur $]\,0\,;e^{0,5}\,[$, $g(x) > 0$

La fonction g est strictement décroissante sur $[\,e^{0,5}\,;+\infty\,[$, g s'annule en e donc sur $[\,e^{0,5}\,;e\,[$, $g(x) > 0$; $g(e) = 0$ et sur $]\,e\,;+\infty\,[$, $g(x) < 0$

x	0		e		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

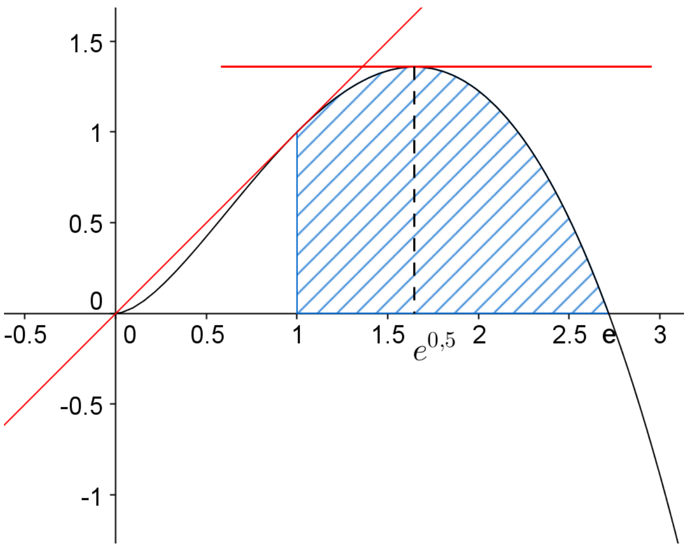
Partie B Représentation graphique et aire sous la courbe

1.

x	0	0,5	1	1,5	$e^{0,5} \approx 1,65$	2	$e \approx 2,72$	3	4
$g(x)$	0	0,42	1,00	1,34	1,36	1,23	0	– 0,89	– 6,18

2. $g(1) = 1$ et $g'(1) = 0$ donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe de g : $y - g(1) = g'(1)(x - 1)$ devient

$y - 1 = x - 1$ soit $y = x$



3. La fonction g est positive sur $[1\,;e]$ donc l'aire en unités d'aire du domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$ est

$$A = \int_1^e g(x)\,dx$$

$$u'(x) = x^2 \qquad u(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$v(x) = 1 - \ln x \qquad v'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\text{donc } A = \left[\frac{1}{3}x^3(1 - \ln x)\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3(1 - \ln x)\right]_1^e + \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3(1 - \ln x)\right]_1^e + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e$$

$$A = \frac{1}{3}e^3(1 - \ln e) - \frac{1}{3} \times (1 - \ln 1) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1$$

$$A = \frac{1}{3}e^3(1 - 1) - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}e^3 - \frac{1}{9}$$

$$A = \frac{1}{9}(e^3 - 4)$$

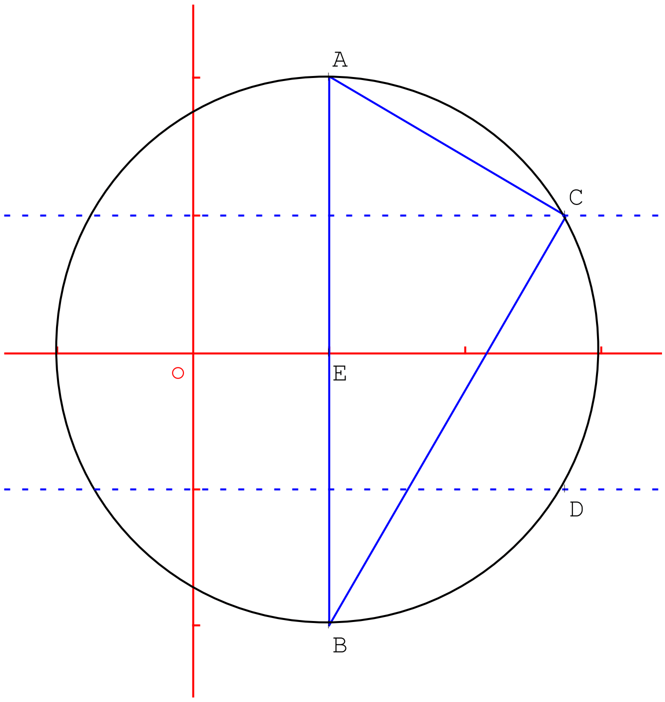
Exercice 4 3 points Commun à tous les candidats

1. $z^2 - 2z + 5 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 5 = -16 = (4\,\mathrm{i})^2$

$z_1 = \dfrac{2 - 4\,\mathrm{i}}{2} = 1 - 2\,\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + 2\,\mathrm{i}$

2. *a.*



b. $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{1 - 2\,\mathrm{i} - (1 + \sqrt{3} + \mathrm{i})}{1 + 2\,\mathrm{i} - (1 + \sqrt{3} + \mathrm{i})} = \dfrac{-\sqrt{3} - 3\,\mathrm{i}}{-\sqrt{3} + \mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{3} + 3\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \mathrm{i}} = \dfrac{(\sqrt{3} + 3\,\mathrm{i})(\sqrt{3} + \mathrm{i})}{(\sqrt{3} - \mathrm{i})(\sqrt{3} + \mathrm{i})}$

$\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{3 - \sqrt{3}\,\mathrm{i} - 3\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 3}{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = -\dfrac{4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4} = -\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

c. $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ donc $\arg \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle ABC est rectangle en C.

3. Le triangle ABC est rectangle en C donc les points A, B, C appartiennent au cercle Γ de diamètre [AB] donc de centre E milieu de [AB] d'affixe 1 et de rayon EA = EB = 2

ED = $|1 + \sqrt{3} - \mathrm{i} - 1| = |\sqrt{3} - \mathrm{i}| = \sqrt{3 + 1} = 2$ donc D appartient au cercle Γ.

4. C et D appartiennent au cercle Γ, d'autre part C appartient à la droite d'équation $y = 1$ et a une abscisse positive.
D appartient à la droite d'équation $y = -1$ et a une abscisse positive d'où la construction de C et D.

Exercice 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Proposition 1 : FAUX « Le point A appartient à la droite D ».
Le point de D d'abscisse 0 correspond à $t = 0$, il a pour coordonnées $(-1 ; 2 ; 0)$ donc $A \notin D$.

Proposition 2 : VRAI « Le plan perpendiculaire à la droite D passant par le point O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$ ».
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(2 ; -3 ; 1)$, il est un vecteur normal à tout plan perpendiculaire à la droite D.
Le plan perpendiculaire à la droite D passant par le point O est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = 0$ donc a pour équation :
$2x - 3y + z = 0$ ».

Proposition 3 : FAUX « Les droites D et D' sont orthogonales ».
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(2 ; -3 ; 1)$, un vecteur directeur de D' est $\vec{v}(3 ; 1 ; 3)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 - 3 \times 1 + 1 \times 3 = 6$
donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux, les droites D et D' ne sont pas orthogonales.

Proposition 4 : FAUX « Les droites D et D' sont coplanaires ».
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc D et D' ne sont pas parallèles, or deux droites coplanaires sont soit parallèles soit sécantes.

Cherchons si les droites D et D' sont sécantes. Si elles sont sécantes leur point d'intersection doit vérifier : $\begin{cases} x = 2t - 1 = 3t' \\ y = -3t + 2 = t' + 2 \\ z = t = 3t' - 2 \end{cases}$

donc $t = 3t' - 2$ or $2t - 1 = 2(3t' - 2) - 1 = 6t' - 5$ on ne peut pas avoir $6t' - 5 = 6t'$ donc le système n'a pas de solution, les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

Proposition 5 : VRAI « La distance du point A au plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ est $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

$$d = \frac{|2 \times (-1) - 3 \times (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

Exercice 5 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Proposition 1 : VRAI « Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2 ».

$2011 = 7 \times 287 + 2$ donc $2011 \equiv 2$ [7] donc $2011^{2011} \equiv 2^{2011}$ [7]

$2^3 = 8 = 7 + 1$ donc $2^3 \equiv 1$ [7] or $2011 = 3 \times 670 + 1$ donc $2^{2011} = 2^{3 \times 670 + 1} = 2^{3 \times 670} \times 2 = (2^3)^{670} \times 2$

donc $2^{2011} \equiv 2$ [7] or $2011^{2011} \equiv 2^{2011}$ [7] donc $2011^{2011} \equiv 2$ [7]

$0 \leq 2 < 7$ donc le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2

Proposition 2 : FAUX « S'il existe un couple de nombres entiers relatifs (u, v) tel que $u\,a + v\,b = 3$, alors PGCD$(a , b) = 3$ ».

soit $a = 3$ et $b = 2$ alors $3 - 2 = 1$ donc $3 \times 3 - 2 \times 3 = 3$ or 3 et 2 sont premiers entre eux.

Proposition 3 : VRAI « L'entier $n^2 - 3\,n - 10$ n'est jamais un nombre premier ».

L'équation $x^2 - 3\,x - 10 = 0$ a pour solution -2 et 5 donc $n^2 - 3\,n - 10 = (n + 2)\,(n - 5)$

$n \geq 5$ donc $n - 5 \geq 0$ et $n + 2 \geq 7$ et $n + 2$ et $n - 5$ divisent $n^2 - 3\,n - 10$.

- si $n = 5$, $n^2 - 3\,n - 10 = 0$ qui n'est pas un nombre premier
- Si $n > 5$, $n - 5$ est un diviseur non nul de $n^2 - 3\,n - 10$. Montrons que $n - 5$ est un diviseur de $n^2 - 3\,n - 10$ distinct de 1 et de lui-même
  - Si $n - 5 = 1$ alors $n = 6$ or $6^2 - 6 \times 3 - 10 = 8$ donc si $n = 6$, $n^2 - 3\,n - 10$ n'est pas un nombre premier.
  - Est-ce que $n^2 - 3\,n - 10 = n - 5$? il faudrait alors que $n + 2 = 1$ ce qui est impossible ($n \geq 5$)

  $n - 5$ est un diviseur de $n^2 - 3\,n - 10$ distinct de 1 et de lui-même donc $n^2 - 3\,n - 10$ n'est pas un nombre premier.

Proposition 4 : FAUX « Il existe un unique réel γ tel que le point A appartient au cône Γ ».

A appartient au cône Γ si $(-2)^2 + (-1)^2 = 5\,\gamma^2$ soit $\gamma^2 = 1$ donc $\gamma = 1$ ou $\gamma = -1$

Proposition 5 : VRAI « Cette intersection peut être la réunion de deux droites ».

$$\mathrm{M} \in \Gamma \cap \mathrm{P}_a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5\,z^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + y^2 = 5\,z^2 \\ x = a \end{cases}$$

$a^2 + y^2 = 5\,z^2 \Leftrightarrow 5\,z^2 - y^2 = a^2 \Leftrightarrow (\sqrt{5}\,z - y)\,(\sqrt{5}\,z + y) = a^2$ ce qui est en général l'équation d'une hyperbole sauf si $a = 0$.

Si $a = 0$ ce système devient $\begin{cases} y^2 = 5\,z^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{5}\,z \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -\sqrt{5}\,z \\ x = 0 \end{cases}$ ce qui est la réunion de deux droites.