Exercice 6

Une classe de terminale compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur de cette classe interroge au hasard un élève. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent ce qui fait qu'à chaque cours, le choix de l'élève par le professeur est indépendant des choix précédents.

1. Quelle est la probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit une fille?
2. *n* est un entier positif. On appelle X la variable aléatoire définie par :

"X = nombre de filles interrogées durant *n* cours de mathématiques consécutifs"

Quelle est la loi de probabilité de X?

3. Quelle est la probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 4 durant 10 cours consécutifs?
4. Quelle doit être le nombre minimum de cours consécutifs pour la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieur à 0,001?
5. Durant un trimestre, il y a 36 cours le mathématiques. Quel nombre de filles interrogées peut-on espérer?

CORRECTION

a : Comme il y a 30 élèves dans la classe dont 20 filles ; la probabilité que l'élève interrogé soit une fille est : $\frac{2}{3}$.

X est la variable aléatoire égale au nombre de filles interrogées durant *n* cours de mathématiques par le professeur.

b Comme on suppose que le professeur interroge de façon indépendante les élèves d'un cours à l'autre ; pour chaque cours ; la probabilité qu'une fille soit interrogée est constamment égale à $p = \frac{2}{3}$.

La variable X suit donc un loi Binomiale de paramètres (n ; $p = \frac{2}{3}$).

***c* :** En particulier ; pour $n = 10$ et $k = 4$; on a :

$$p(X = 4) = C_{10}^{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{6} = C_{10}^{4} \times \frac{2^{4}}{3^{10}}$$

$$p(X = 4) = \frac{3\,360}{59\,049} = \frac{1120}{19\,683}$$

***d* :** On cherche n tel que $p(X = 0) \leq 0{,}001$.

$p(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ on veut donc avoir $\frac{1}{3^{n}} \leq 0{,}001$

soit $3^{n} \geq 1\,000$

En utilisant la fonction ln (logarithme népérien) ; on doit donc avoir : $n \ln 3 \geq \ln 1\,000$

soit $n \geq \frac{\ln 1\,000}{\ln 3}$ or $\frac{\ln 1\,000}{\ln 3} \approx 6{,}28$ donc $n = 7$

***e* :** Le nombre filles interrogées que l'on peut espérer est l'espérance de X.

On sait que l'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi Binomiale de paramètres (n ; p) est : $E[X] = n \,.\, p$

Sur 36 cours de mathématiques ; on peut donc espérer $36 \times \frac{2}{3} = 24$ filles interrogées.