Soient a et b deux réels quelconques.

On pose : $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que, pour tous réels a et b, A s'exprime en fonction de I, J, a et b.

2. *a*. Calculer J^2.

b. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, J^n.

3. *a*. Calculer A^2.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = a^n\, I + \dfrac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\, J$.

On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. *a*. On suppose dans cette question que $a = 0$ et que A est inversible. Calculer $C\,(A\,A^{-1})$ et $(C\,A)\,A^{-1}$.
En déduire par un raisonnement par l'absurde que, lorsque a est nul, la matrice A n'est pas inversible.

b. On suppose dans cette question que $a + 2\,b = 0$ et que A est inversible. Calculer $J\,(A\,A^{-1})$ et $(J\,A)\,A^{-1}$.
En déduire comme dans la question précédente que, lorsque $a + 2\,b = 0$, A n'est pas inversible.

c. On suppose $a \neq 0$ et $a + 2\,b \neq 0$ et on pose : $B = \dfrac{1}{a}\, I - \dfrac{b}{a\,(a+2\,b)}\, J$.

Montrer que B est l'inverse de A.

CORRECTION

1. $A = a\,I + b\,J$

2. *a*. $J^2 = 2\,J$

b. Montrons que pour tout entier naturel n non nul, $J^n = 2^{n-1}\,J$

La propriété est vérifiée pour $n = 1$: $2^{1-1} \times J = 2^0\,J = J$

Hérédité : montrons que pour tout $n \geq 1$, si $J^n = n\,J$ alors $J^{n+1} = 2^n\,J$

$J^{n+1} = J^n \times J = 2^{n-1}\,J \times J = 2^{n-1} \times 2\,J = 2^n\,J$

La propriété est héréditaire donc pour tout $n \geq 1$, $J^n = 2^{n-1}\,J$.

3. *a*. $A^2 = (a\,I + b\,J) = a^2\,I + 2\,a\,b\,J + b^2\,J^2$

$A^2 = a^2 + 2\,b\,(\,a + b\,)\,J = a^2 + \dfrac{(a+2\,b)^2 - a^2}{2}\,J$

b. Montrons que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = a^n\,I + \dfrac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\,J$.

<u>Initialisation</u> : La propriété est vérifiée pour $n = 1$: $a^1\,I + \dfrac{(a+2\,b) - a}{2}\,J = a\,I + b\,J = A$

<u>Hérédité :</u> montrons que pour tout $n \geq 1$, si $A^n = a^n\,I + \dfrac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\,J$, alors $A^{n+1} = a^{n+1}\,I + \dfrac{(a+2\,b)^{n+1} - a^{n+1}}{2}\,J$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = \left(a^n\,I + \frac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\,J \right) \times (a\,I + b\,J)$$

$$A^{n+1} = a^{n+1}\,I + a^n\,b\,J + a\,\frac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\,J + b\,\frac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\,J^2$$

$$A^{n+1} = a^{n+1}\,I + a^n\,b\,J + a\,\frac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\,J + 2\,b\,\frac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\,J$$

$$A^{n+1} = a^{n+1}\,I + \left(a^n\,b + (\,a + 2\,b\,)\,\frac{(a+2\,b)^n - a^n}{2} \right) J .$$

$$a^n\,b + (\,a + 2\,b\,)\,\frac{(a+2\,b)^n - a^n}{2} = \frac{(a+2\,b)^{n+1} - a^{n+1} - 2\,b\,a^n + 2\,b\,a^n}{2}$$

$a^n\,b + (\,a + 2\,b\,)\,\dfrac{(a+2\,b)^n - a^n}{2} = \dfrac{(a+2\,b)^{n+1} - a^{n+1}}{2}$ donc $A^{n+1} = a^{n+1}\,I + \dfrac{(a+2\,b)^{n+1} - a^{n+1}}{2}\,J$.

La propriété est héréditaire donc pour tout $n \geq 1$, $A^n = a^n\,I + \dfrac{(a+2\,b)^n - a^n}{2}\,J$.

4. *a*. Si, lorsque a est nul, la matrice A est inversible alors : $C\,(A\,A^{-1}) = C \times I = C$

a est nul, donc $A = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ b & 0 & b \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ donc $C\,A = O$ donc $(C\,A)\,A^{-1} = O$ où O est la matrice dont tous les termes sont nuls.

or $C\,(A\,A^{-1}) = (C\,A)\,A^{-1}$ donc $C = O$ ce qui est faux donc lorsque a est nul, la matrice A n'est pas inversible.

b. $a + 2\,b = 0$ donc $a + b = -\,b$
Si lorsque $a + 2\,b = 0$, A est inversible alors $J\,(A\,A^{-1}) = J$

$A = \begin{pmatrix} -b & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & -b \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $J\,A = O$ donc $(J\,A)\,A^{-1} = O$

or $J\,(A\,A^{-1}) = (J\,A)\,A^{-1}$ donc $J = O$ ce qui est faux donc lorsque $a + 2\,b = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

c. $B = \frac{1}{a}\,I - \frac{b}{a\,(a+2\,b)}\,J$.

$A\,B = \frac{1}{a}\,A - \frac{b}{a\,(a+2\,b)}\,A\,J$

$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A\,J = \begin{pmatrix} a+2\,b & 0 & a+2\,b \\ a+2\,b & 0 & a+2\,b \\ a+2\,b & 0 & a+2\,b \end{pmatrix} = (a + 2\,b)\,J$

$A\,B = \frac{1}{a}\,A - \frac{b}{a}\,J$ donc $A\,B = \frac{1}{a}\,(A - b\,J)$
or $A - b\,J = a\,I$ donc $A\,B = I$
si $a \neq 0$ et $a + 2\,b \neq 0$, B est l'inverse de A.