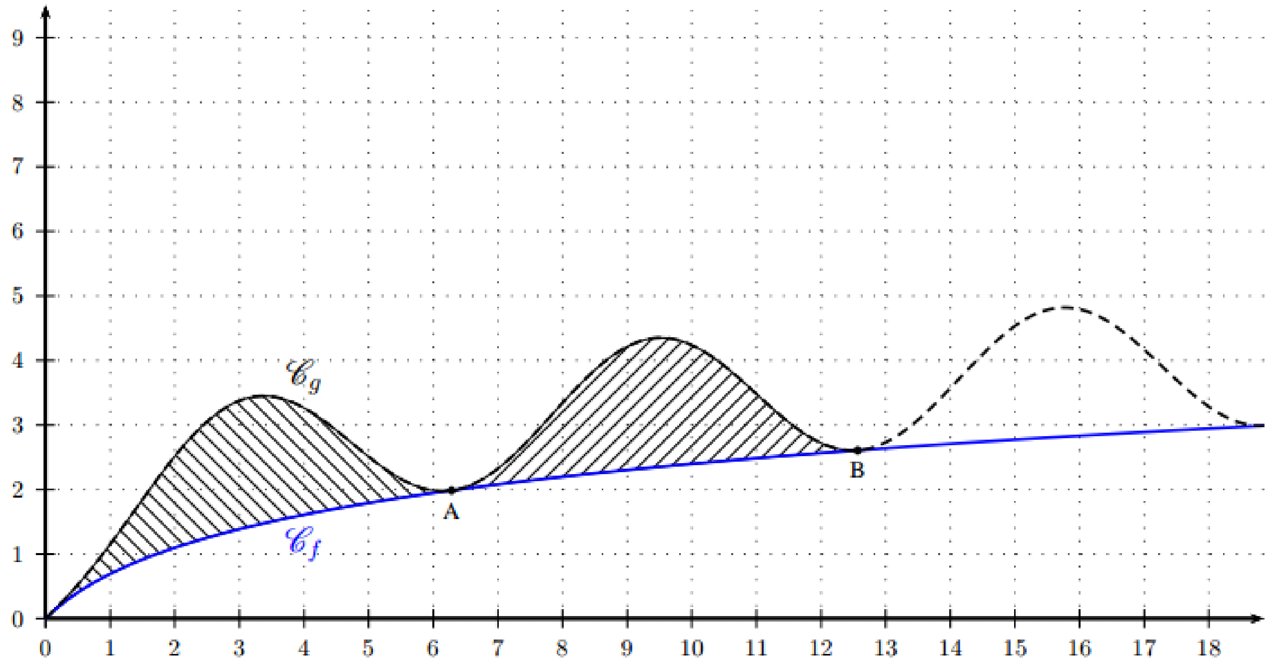
Nouvelle Calédonie Mars 2016

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0 ; 16] par

$$f(x) = \ln(x + 1) \text{ et } g(x) = \ln(x + 1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

Ces courbes sont données en annexe 1.
Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.



CORRECTION

Pour tout x de [0 ; 16] $g(x) - f(x) = 1 - \cos x \geq 0$ donc C_f est en dessous de C_g.
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\,k\,\pi$ où k est un entier tel que $0 \leq 2\,k\,\pi \leq 16$ soit $0 \leq k \leq 2$
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ dans [0 ; 16] sont 0, $2\,\pi$ et $4\,\pi$.

La première aire hachurée est égale à $\displaystyle\int_0^{2\pi} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)\,\mathrm{d}x = \left[\, x - \sin x \,\right]_0^{2\pi} = 2\,\pi$

La seconde hachurée est égale à $\displaystyle\int_{2\pi}^{4\pi} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos x)\,\mathrm{d}x = \left[\, x - \sin x \,\right]_{2\pi}^{4\pi} = 2\,\pi = 2\,\pi$

Les deux aires hachurées sont égales.