EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 ; 2 ; − 1), B(1 ; 1 ; 0), C(9 ; – 1 ; – 2), S(1 ; 1 ; 1).

On admet qu'une équation du plan (ABC) est $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \quad (t \text{ réel}) \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \quad (t \text{ réel}) \\ z = 3 + t \end{cases}$ *c.* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \quad (t \text{ réel}) \\ z = 2t \end{cases}$

2. Les coordonnées du point S' symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

a. $\left(\frac{10}{9} ; \frac{11}{9} ; \frac{10}{9}\right)$ *b.* $\left(\frac{5}{9} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{9}\right)$ *c.* $\left(\frac{7}{9} ; \frac{5}{9} ; \frac{5}{9}\right)$

3. Le triangle ABC est :

a. isocèle *b.* rectangle en A *c.* rectangle en B

4. L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 9$ est :

a. un plan passant par S *b.* une sphère passant par S *c.* une sphère de centre S

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B et J les points d'affixes respectives – i, 1 – i et i.

On désigne par Δ la médiatrice du segment [AB] et par C le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout point M d'affixe z distinct de 1 – i, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z + \mathrm{i})}{z - 1 + \mathrm{i}}$.

Le point M' est appelé image du point M.

1. Calculer les affixes des points A' et O'.
2. Sur la feuille de papier millimétré, faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice (unité graphique 4 cm).
3. Montrer que l'équation $z = \dfrac{\mathrm{i}(z + \mathrm{i})}{z - 1 + \mathrm{i}}$ admet deux solutions que l'on précisera.

On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions.

Justifier que les points E et F appartiennent au cercle C et les placer sur la figure.

4. Soit M un point distinct du point B et M' son image.

a. Exprimer la distance OM' en fonction des distances AM et BM.

b. Montrer que si le point M décrit la droite Δ, alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

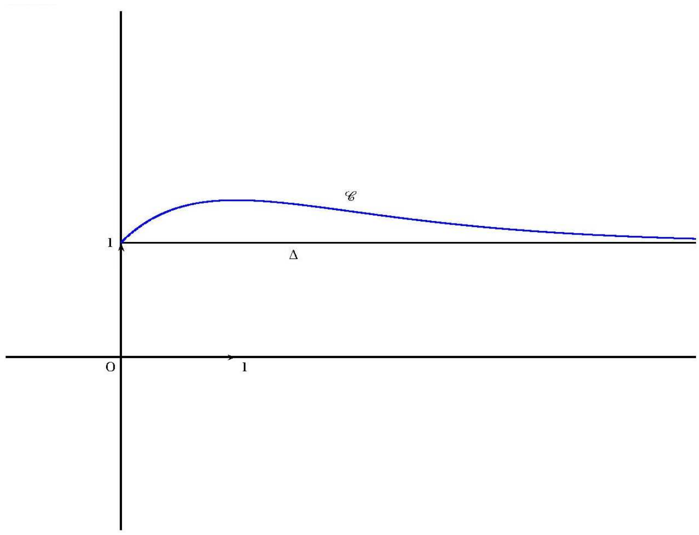
5. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Montrer que si le point M décrit la droite (AB) privée du point B, alors le point M' appartient à une droite que l'on précisera.

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par $f(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Sa courbe représentative C dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et la droite Δ d'équation $y = 1$ sont tracées ci-contre.



Partie A

1. Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.

a. La droite Δ est asymptote à la courbe C en + ∞.

b. La fonction f est décroissante sur l'intervalle [1 ; + ∞ [.

2. Soit t un nombre réel positif.

On considère l'intégrale $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$

a. Interpréter graphiquement cette intégrale.

b. Montrer que $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = t - t\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + 1$.

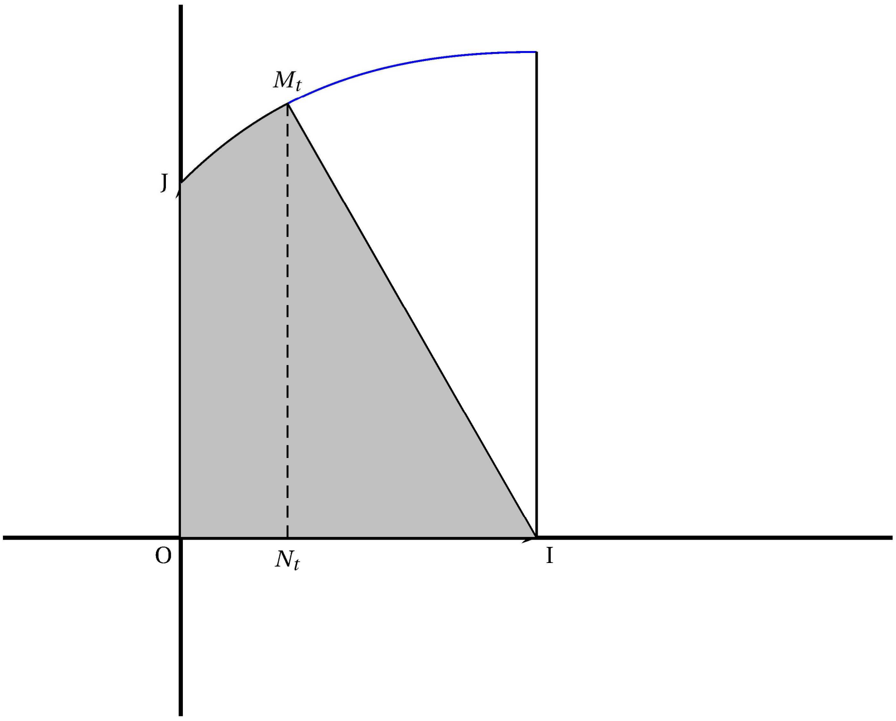
Partie B

On note I le point de coordonnées (1 ; 0) et J le point de coordonnées (0 ; 1).

Pour tout nombre réel t de l'intervalle [0 ; 1], M_t désigne le point de la courbe C d'abscisse t et N_t le point de coordonnées (t ; 0).

On appelle D_t, le domaine du plan délimité par la droite (I M_t), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées la courbe C .

Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-joint. Soit $\mathcal{A}(t)$ la mesure de son aire exprimée en unité d'aire.



1. Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(0)$ et donner sa valeur exacte.
2. Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(1)$ et donner sa valeur exacte.
3. Calculer l'aire du triangle M_tN_tI.
4. En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 1],

$$\mathcal{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-t}.$$

5. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il un unique nombre réel α de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \times \mathcal{A}(1)$? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

c. Sur l'annexe à rendre avec la copie, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.

À partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2, u_3 et u_4.

Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

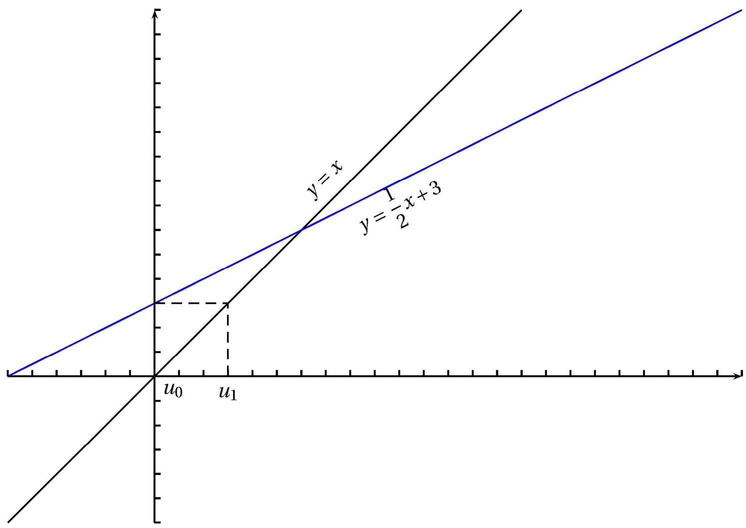
b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.

On suppose que w_0 est strictement supérieur à 6. Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.

ANNEXE Exercice 4 (à rendre avec la copie)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



CORRECTION

EXERCICE 1

1. **réponse *b*. vraie**

$\delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2\,t \\ z = 2\,t \end{cases}$ est la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (0 ; – 2 ; 2). $\overrightarrow{AB}$ (0 ; – 1 ; 1) donc $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{u}$

Si t = 0 alors le point B(1 ; 1 ; 0) appartient à la droite δ donc δ est la droite passant par B de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ donc δ = (AB).

2. **réponse *b*. vraie**

Les coordonnées du point S' symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

Le milieu de [SS'] appartient au plan (ABC) et (SS') est orthogonale au plan (ABC) donc $\overrightarrow{SS'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$ (1 ; 2 ; 2)

Soit $S_1\left(\frac{5}{9};\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right)$ alors $\overrightarrow{SS_1}\left(-\frac{4}{9};-\frac{8}{9};-\frac{8}{9}\right)$ donc $\overrightarrow{SS_1} = -\frac{4}{9}\vec{n}$ donc (SS_1) est orthogonale au plan (ABC).

Le milieu de [SS_1] est le point de coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)$ or $\frac{7}{9} + 2\times\frac{5}{9} + 2\times\frac{5}{9} = 3$ donc S_1 appartient au plan (ABC) d'où S' = S_1

3. **réponse *c*. vraie**

$AB^2 = 0 + 1 + 1 = 2$; $BC^2 = 64 + 4 + 4 = 72$; $AC^2 = 64 + 9 + 1 = 74$

donc $BC^2 + AB^2 = AC^2$, le triangle ABC est rectangle en B.

4. **réponse *b*. vraie**

Soit G le barycentre de {(A ; 1) (B ; – 1) (C ; 1)} alors $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ donc $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 9 \Leftrightarrow MG = 9$

L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 9$ est une sphère de centre G.

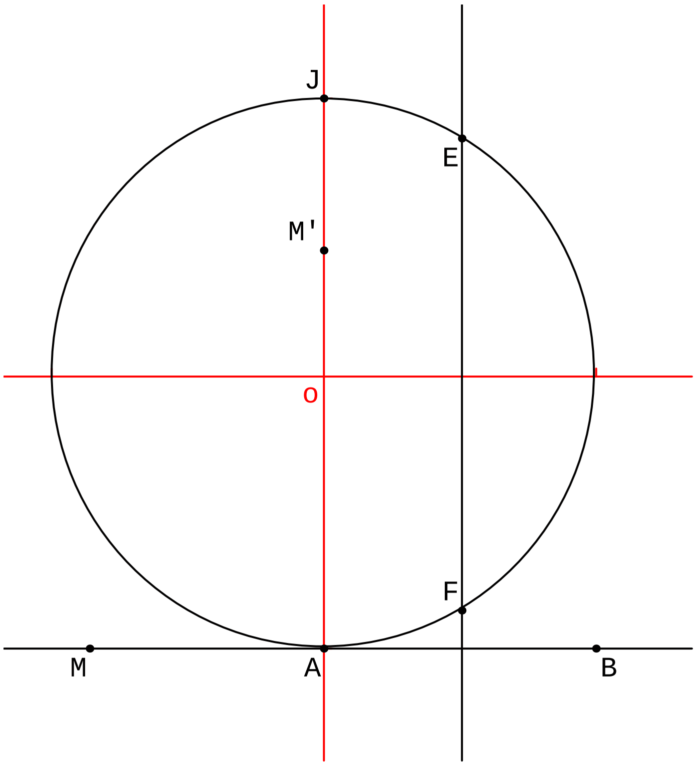
G est le point coordonnées (9 ; 0 ; – 3) donc $SG^2 = 64 + 1 + 16 = 81$ donc SG = 9 donc S appartient à la sphère.

EXERCICE 2

1. Calculer les affixes des points A’ et O’.

$a' = \dfrac{i(-i+i)}{-i-1+i} = 0$ donc A’ = O ; o’ = $\dfrac{i(0+i)}{0-1+i} = \dfrac{-1}{-1+i} = \dfrac{1+i}{2}$

2.



3. $z = \dfrac{i(z+i)}{z-1+i} \Leftrightarrow z \neq 1 - i$ et $z^2 - z + iz = iz - 1 \Leftrightarrow z \neq 1 - i$ et $z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}\,i)^2$ donc l’équation $z = \dfrac{i(z+i)}{z-1+i}$ admet deux solutions $z_E = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_F = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

$|z_E|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$ donc $|z_E| = 1$ donc OE = 1 de même $|z_F|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$ donc $|z_F| = 1$ donc OF = 1

Les points E et F appartiennent au cercle C.

4. *a*. M a pour affixe z avec $z \neq 1 - i$ et M’ pour affixe z' telle que $z' = \dfrac{i(z+i)}{z-1+i}$.

$OM' = |z'| = \left|\dfrac{i(z+i)}{z-1+i}\right| = \dfrac{|z+i|}{|z-1+i|} = \dfrac{AM}{BM}$

b. si le point M décrit la droite Δ, alors AM = BM donc OM’ = 1 donc le point M’ appartient au cercle C.

5. si le point M décrit la droite (AB) privée du point B, alors il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{AB}$

donc $z - 1 + i = k(z + i)$ donc $z' = \dfrac{1}{k}\,i$ donc M’ appartient à l’axe des imaginaires purs (O exclu).

EXERCICE 3

Partie A

1. *a*. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. La droite Δ d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

b. $f'(x)=e^{-x}-x\,e^{-x}=(1-x)\,e^{-x}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur ℝ donc si $x\geq 1$, $f'(x)\leq 0$ donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

2. *a*. f est une fonction continue, positive sur $[0\,;+\infty[$ donc $\int_0^t f(x)\,dx$ est la mesure de l'aire du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x=0$, $x=t$.

b. $\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t 1\,dx+\int_0^t x\,e^{-x}\,dx=t+\int_0^t x\,e^{-x}\,dx$

Calcul de $\int_0^t x\,e^{-x}\,dx$ par intégration par parties

Soit $u'(x)=e^{-x}$ alors $u(x)=-e^{-x}$

soit $v(x)=x$ alors $v'(x)=1$ donc $\int_0^t x\,e^{-x}\,dx=\left[-x\,e^{-x}\right]_0^t-\int_0^t -e^{-x}\,dx=-t\,e^{-t}-\left[e^{-x}\right]_0^t=-t\,e^{-t}-e^{-t}+1.$

donc $\int_0^t f(x)\,dx=t-t\,e^{-t}-e^{-t}+1.$

Partie B

1. $\mathcal{A}(0)$ est triangle IOJ donc $\mathcal{A}(0)=\dfrac{1}{2}\,1\times 1=0{,}5$

2. $\mathcal{A}(1)$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $y=0$ et $y=1$

$\mathcal{A}(1)=\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx=1-e^{-1}-e^{-1}+1=2-2\,e^{-1}$

3. L'aire du triangle M_tN_tI est $\dfrac{1}{2}\,f(t)\,(1-t)=\dfrac{1}{2}(1+t\,e^{-t})\,(1-t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}e^{-t}\,(t-t^2)$

4. pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, $\mathcal{A}(t)=\int_0^t f(x)\,dx+\mathcal{A}_{\text{triangle } M_tN_tI}$

$\mathcal{A}(t)=t-t\,e^{-t}-e^{-t}+1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}e^{-t}\,(t-t^2)$

$\mathcal{A}(t)=1+\dfrac{1}{2}+t-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}e^{-t}\,(t-t^2)-t\,e^{-t}-e^{-t}$

$\mathcal{A}(t)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-t}\,(t-t^2-2\,t-2)$

$\mathcal{A}(t)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-t}\,(-t^2-t-2)$

$\mathcal{A}(t)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t}{2}+1\right)e^{-t}.$

5. $\mathcal{A}(\alpha)-\dfrac{1}{2}\mathcal{A}(1)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\alpha}{2}-\left(\dfrac{\alpha^2}{2}+\dfrac{\alpha}{2}+1\right)e^{-\alpha}-1+e^{-1}$

$=\dfrac{1}{2}+e^{-1}+\dfrac{\alpha}{2}-\left(\dfrac{\alpha^2}{2}+\dfrac{\alpha}{2}+1\right)e^{-\alpha}$

Soit la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(t)=\dfrac{1}{2}+e^{-1}+\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t}{2}+1\right)e^{-t}$

g est définie dérivable sur $[0\,;1]$ et $g'(t)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t}{2}+1\right)e^{-t}-(t+\dfrac{1}{2})\,e^{-t}$

$g'(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(t^2-t+1)\,e^{-t}$

$t^2-t+1=0$ n'a pas de solution ($\Delta=-3$) donc pour tout t de $[0\,;1]$: $t^2-t+1>0$

La fonction exponentielle est positive sur ℝ donc pour tout t de $[0\,;1]$: $g'(t)>0$ (somme et produit de termes positifs)

$g(0)=-\dfrac{1}{2}+e^{-1}\approx-0{,}13$ et $g(1)=1-e^{-1}\approx 0{,}63$, g est donc une fonction définie continue strictement croissante sur $[0\,;1]$, $g([0\,;1])=[g(0)\,;g(1)]$ or $0\in[g(0)\,;g(1)]$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α dans $[0\,;1]$

Il existe donc un seul nombre α dans $[[0\,;1]$, tel que $\mathcal{A}(\alpha)=\dfrac{1}{2}\mathcal{A}(1)$

EXERCICE 4

1. *a.* $u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{9}{2}$ $\quad u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{21}{4}$ $\quad u_4 = \frac{3}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_2 = \frac{45}{8}$

b. Vérification : si $n = 0$, $u_1 = 3 = \frac{1}{2}u_0 + 3$. La propriété est vraie pour $n = 0$

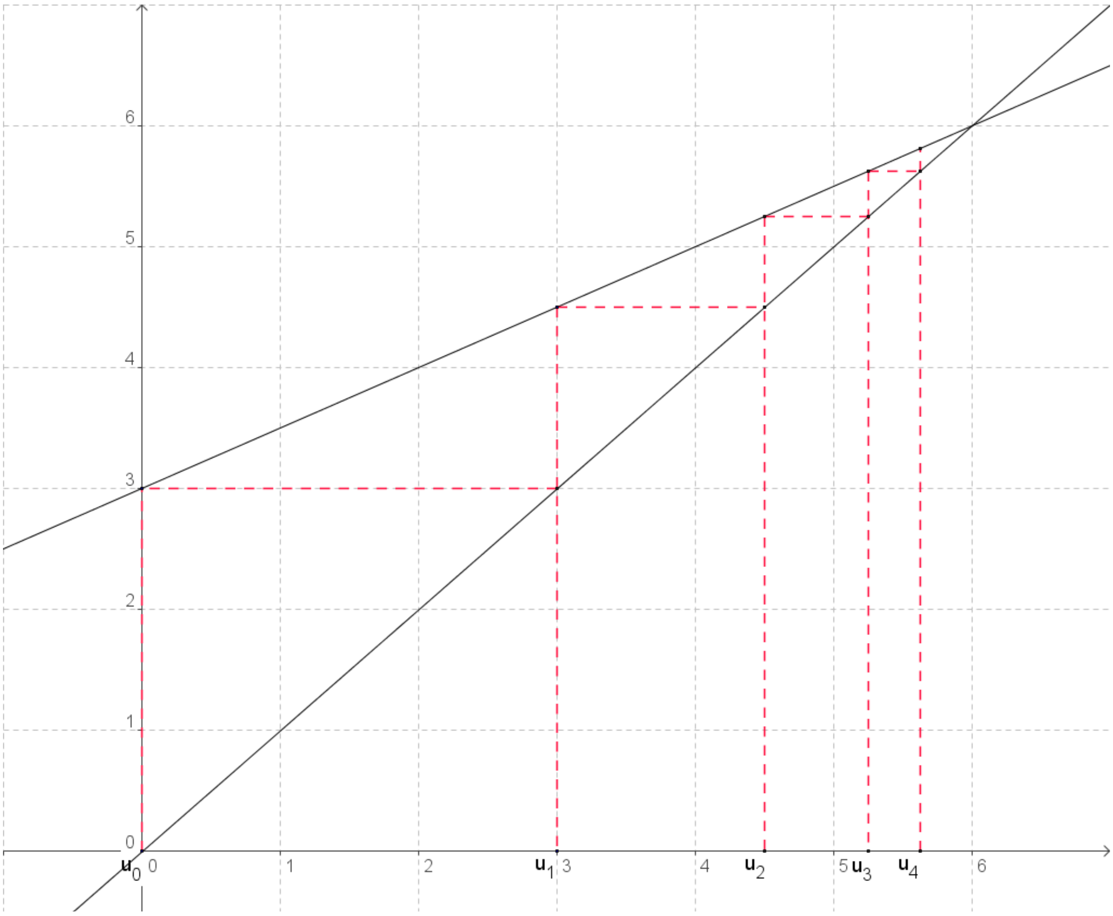
Montrons que pour tout n, si la propriété est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n + 1$ c'est-à-dire que si $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$, alors $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$.

$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ or $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ donc $\frac{1}{2}u_n = u_{n+1} - 3$ donc $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}(u_{n+1} - 3)$

$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$ soit $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

c.



La suite (u_n) semble être croissante et converger vers 6

2. *a.* $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3$ puisque $v_n = u_n - 6$ alors $u_n = v_n + 6$ donc en remplaçant : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -6$ et de raison $\frac{1}{2}$.

b. $v_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n$ comme $u_n = v_n + 6$ alors $u_n = 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

3. En reprenant le même raisonnement, la suite t_n définie par $t_n = w_n - 6$ est géométrique de premier terme $t_0 = w_0 - 6$, de raison $\frac{1}{2}$ donc $t_n = (w_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $w_n = t_n + 6 = 6 + (w_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ or $w_0 > 6$ donc t_n est une suite décroissante, or $w_n = t_n + 6$ donc w_n est une suite décroissante.

$w_n - u_n = 6 + (w_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ donc $w_n - u_n = w_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n - u_n = 0$ donc les suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes.