Exercice 1 (11 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y''+2y'+y=2$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R**, y' désigne la fonction dérivée de y, et y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Résoudre sur **R** l'équation différentielle

$$(E_0) : y''+2y'+y=0.$$

2. Soit un réel b. On définit sur **R** la fonction constante g par : $g(x)=b$.

   Déterminer b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E) sur **R**, qui vérifie les conditions : $f(0)=3$ et $f(-\frac{1}{2})=2$.

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x)=(2x+1)e^{-x}+2$.

On appelle C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

La courbe C est représentée **en annexe** qui devra être rendue avec la copie.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. a. En écrivant $f(x)=2xe^{-x}+e^{-x}+2$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. En déduire l'existence d'une asymptote D à C dont on donnera une équation.

   c. Tracer D sur le graphique fourni en annexe.
3. a. On appelle f' la fonction dérivée de f sur **R**.
   Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(1-2x)e^{-x}$.

   b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur **R**.
4. Soit F la fonction définie sur **R** par : $F(x)=(-2x-3)e^{-x}+2x$.

   a. Vérifier que F est une primitive de f sur **R**.

   b. Calculer la mesure A, en cm², de l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de A.

Exercice 2 (9 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

Une usine fabrique en grande série des disques de diamètre théorique 238 millimètres.

Partie A

Un disque est considéré comme conforme pour son diamètre si ce diamètre, exprimé en mm, est dans l'intervalle [237,18 ; 238,82]. Dans le cas contraire, le disque est non-conforme.

On définit par X la variable aléatoire qui à tout disque produit associe son diamètre en mm.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type 0,4.

Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit conforme pour son diamètre.

Partie B

On considère dans cette partie un stock important de disques. On suppose que 4 % des disques de ce stock n'ont pas un diamètre conforme.
On prélève au hasard dans ce stock des lots de 50 disques pour vérification du diamètre.
Le nombre de disques de ce stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise de 50 disques.
On définit par Y_1 la variable aléatoire qui à chaque lot de 50 disques associe le nombre de disques non-conformes pour leur diamètre.

1. Justifier que Y_1 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. On prélève un lot de 50 disques. Calculer la probabilité que tous les disques de ce lot aient un diamètre conforme.
3. Dans cette question, on décide d'approcher Y_1 par une variable aléatoire Y_2 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   a. Justifier que $\lambda = 2$.

   b. A l'aide de l'approximation de Y_1 par Y_2, calculer la probabilité que le lot prélevé ait au plus 3 disques non-conformes pour leur diamètre.

Partie C

Une grande quantité de disques est livrée à un client. Celui-ci se propose de construire un test bilatéral au risque de 5 %, afin de vérifier si la moyenne μ de l'ensemble des diamètres des disques de la livraison est égale à 238 mm.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 45 disques prélevé dans la livraison associe la moyenne des diamètres de ces 45 disques (la livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est H_0 : « $\mu = 238$ ».

1. Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
2. Sous l'hypothèse H_0, on suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type 0,06.
   Déterminer sous cette hypothèse le réel h tel que : $P(238-h \leq \overline{Z} \leq 238+h) = 0{,}95$.
3. Énoncer la règle de décision du test.
4. On prélève au hasard un échantillon 45 disques dans la livraison. La moyenne des diamètres des disques de cet échantillon est $\overline{z} = 237{,}91$ mm.
   Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la moyenne des disques de la livraison est de 238 mm ?

Annexe (à rendre avec la copie)