

# **SIMULATION NUMERIQUE SUR MICROORDINATEUR DU COMPORTEMENT ET DE LA RUPTURE A GRANDE VITESSE DE DEFORMATION**

par B. SCHAEFFER

## **ABSTRACT**

Deform 2D is a fully non-linear bidimensional software working on a Macintosh microcomputer, taking advantage of the graphic user interface. Automatic meshing is performed by simple clicking in the contour representing the body to be deformed. Displacement and pressure boundary conditions are available in a graphical way. The software is especially adapted to the study of impacts but quasi-static tests may also be simulated. Propagation of waves, glide bands and cracks have been visualized. An application to Charpy impact tests on polycarbonate is shown. Crack nucleation at the elastic-plastic interface has been obtained as may be expected from experiment. Crack propagation speed was found to be one quarter of the shear wave speed. Computed fracture energy is in satisfactory agreement with experimental data.

## **INTRODUCTION**

La simulation numérique du comportement dynamique des structures existe depuis une vingtaine d'années, mais elle nécessitait des moyens importants. Avec l'avènement des microordinateurs, les expériences numériques deviennent possibles en laboratoire. La méthode proposée ici est particulièrement adaptée à la simulation des essais dynamiques sur éprouvettes.

Le procédé de calcul [1] consiste à découper le milieu déformable en quadrilatères où les variables sont constantes. Les déformations sont calculées directement d'après la variation de géométrie du quadrilatère constituant la maille. Les contraintes sont reliées aux déformations par une loi de comportement rhéologique. Enfin, par intégration numérique des équations de la mécanique appliquées à un 'élément' construit en assemblant les quatre demi-maillages entourant chaque noeud, on obtient la déformation.

## **METHODE DE CALCUL**

### **Déformations**

La configuration d'un corps solide est décrite par un modèle mathématique continu dont les points géométriques s'identifient à la position des particules matérielles [2]. Un vecteur infinitésimal de longueur  $ds$  et de coordonnées  $dx_i$ , devient, après déformation, un vecteur de longueur  $ds'$  et de coordonnées  $dx'_i$ . Au second ordre près, les nouvelles coordonnées sont fonctions linéaires des anciennes, avec, comme coefficients, les gradients de déformation,  $\partial x'_i / \partial x_j$  [3]. Les déformations sont évaluées à partir de la variation de longueur au cours de la déformation d'un vecteur lié au milieu continu :

$$ds'^2 - ds^2 = 2 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (1)$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (2)$$

est la déformation de Green (ou Green-Lagrange) dont l'évaluation se fait par rapport au repère initial [2]. En appliquant la formule (1) à une traction simple le long du premier axe de coordonnées, on trouve [4]:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{ds'}{ds} \right)^2 - 1 \right] \approx \frac{(ds' - ds)}{ds} \quad (3)$$

Pour les petites déformations, on retrouve donc la définition classique de Cauchy de l'allongement unitaire, variation de longueur de l'éprouvette rapportée à sa longueur initiale [2]. La déformation volumique est approximée par

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon_{mm} \quad (4)$$

## Contraintes

La loi de comportement ou équation d'état rhéologique [5] exprime la relation entre les contraintes et les déformations. On utilise les contraintes vraies ou eulériennes, relatives à la configuration déformée, et non les contraintes nominales (se rapportant à la configuration initiale).

Les composantes du tenseur des contraintes sont constituées d'une partie sphérique, correspondant à la pression, et d'une partie déviateur, correspondant aux cisaillements:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{mm}}{3} \delta_{ij} + \left( \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{mm}}{3} \delta_{ij} \right) \quad (5)$$

La loi de comportement est séparée en une partie sphérique qui relie la pression au volume, et une partie déviateur. On a choisi une combinaison linéaire d'un solide hypoélastique et d'un fluide visqueux, c'est-à-dire un solide de Kelvin compressible, en incrémental:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = K \frac{d\varepsilon_{mm}}{dt} \delta_{ij} + 2\mu \frac{d}{dt} \left( \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{mm}}{3} \delta_{ij} \right) + 2\eta \frac{d^2}{dt^2} \left( \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{mm}}{3} \delta_{ij} \right) \quad (6)$$

Ce modèle rend compte de l'amortissement mais ne permet pas de simuler la relaxation des contraintes à allongement imposé. La loi de comportement est complétée par des critères de plasticité (Tresca) et de rupture (Tresca-Coulomb). Le second se distingue du premier par une variation linéaire avec la pression du cisaillement maximal.

## Mouvement

Le mouvement d'un corps déformable démarre sous l'action des conditions initiales, et continue dans un espace restreint par les conditions aux limites, en respectant les équations de la mécanique. Les conditions initiales sont les valeurs des paramètres du problème (et éventuellement de leurs dérivées) à l'instant zéro: état du matériau, géométrie. Sous sa forme intégrale, la loi fondamentale de la dynamique, pour un élément de volume  $\Omega$ , limité par une surface  $\Sigma$ , s'écrit:

$$\iiint_{\Omega} \rho \Gamma_i dV = \iiint_{\Omega} \rho g_i dV + \iint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS \quad (7)$$

où les  $\Gamma_i$  sont les composantes de l'accélération, les  $g_i$  celles de la pesanteur et les  $n_j$  celles de la normale à  $\Sigma$ .  $dV$  et  $dS$  sont des éléments de volume et de surface.

Si le domaine  $\Omega$  est petit, la densité  $\rho$  est constante et les composantes de l'accélération vont s'écrire:

$$\Gamma_i = g_i + \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS \quad (8)$$

où

$$M = \iiint_{\Omega} \rho dV \quad (9)$$

est la masse, constante, de l'élément de volume  $\Omega$ . La connaissance des variables du membre de droite de l'équation (9) permet de calculer le mouvement du centre de gravité du domaine  $\Omega$  par une double quadrature, qui donne les composantes de la vitesse:

$$V_i = \int_0^t \Gamma_i dt \quad (10)$$

puis ses coordonnées:

$$X_i = \int_0^t V_i dt \quad (11)$$

## Résolution numérique

Le milieu continu est découpé en quadrilatères quelconques (fig. 1) où les contraintes et les déformations sont constantes. On peut associer à chaque quadrilatère un triangle de référence, construit sur les diagonales, qui définit les déformations  $\epsilon_{ij}$  :

$$\epsilon_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^3 b_{ij} L_k^2 \quad (12)$$

D'après la formule (12), les déformations sont une fonction linéaire des carrés des longueurs  $L_k$  des côtés du triangle de référence. La partie sphérique du tenseur des déformations est directement proportionnelle à la variation de volume, c'est-à-dire à l'aire de la maille (déformation plane).

Les conditions initiales et aux limites sont appliquées soit à des mailles (pression), soit à des noeuds (vitesse, position...) ou en effectuant des tests sur l'appartenance ou non d'un noeud à une région (contact).

Les contraintes sont évaluées à partir des déformations par l'équation d'état rhéologique (6). Le mouvement d'un noeud, considéré comme un point matériel, est calculé en appliquant la loi fondamentale de la dynamique au quadrilatère, constitué de quatre demi-mailles, obtenu en joignant les quatre noeuds entourant le noeud considéré. L'effort résultant agissant sur ce quadrilatère, est la somme des forces surfaciques appliquées aux quatre diagonales entourant le noeud. On en déduit l'accélération puis les nouvelles coordonnées des noeuds.

On doit respecter la condition de Courant-Friedrichs-Lewy [6] pour un calcul stable: la propagation des ondes durant un pas de temps  $\Delta t$  doit être inférieure à la plus petite dimension de la maille. A cause de cette condition la durée d'un calcul est proportionnelle à la durée physique du phénomène simulé, d'où la nécessité d'effectuer les calculs à une vitesse de déformation aussi élevée que possible.

## Interface utilisateur

Les contours définissant la géométrie du problème peuvent être dessinés avec la souris ou à l'aide des logiciels

de dessin disponibles sur Macintosh, comme MacPaint ou MacDraw. La fenêtre graphique sert à définir la géométrie du problème par les contours à l'intérieur desquels on clique avec la souris après les avoir éventuellement modifiés pour être analysés par le logiciel. Seule la pièce à déformer fait l'objet d'un maillage (automatique). Il n'est pas nécessaire de définir les noeuds individuellement, même sur le contour, il suffit d'indiquer le nombre total de noeuds souhaité. Les contours sont de plusieurs types: le domaine physique, la pièce mobile qui impose le déplacement, la zone sous pression, la pièce à déformer qui peut être multiples fois connexe, éventuellement la partie de la pièce constituée d'un second matériau. Les données numériques sont saisies dans une fenêtre de dialogue. Le logiciel attribue à chaque maille les caractéristiques du matériau dont elle est constituée (deux matériaux au maximum), ainsi que les autres valeurs initiales et conditions aux limites. On peut visualiser les pressions, les cisaillements, les vitesses et récupérer l'image calculée dans la plupart des logiciels Macintosh. La programmation est en langage Pascal Objet (MacApp). Un calcul de 5000 noeuds dure une journée sur Macintosh II.

## RESULTATS

On présente ici les résultats obtenus en résilience sur éprouvettes lisse et entaillée.

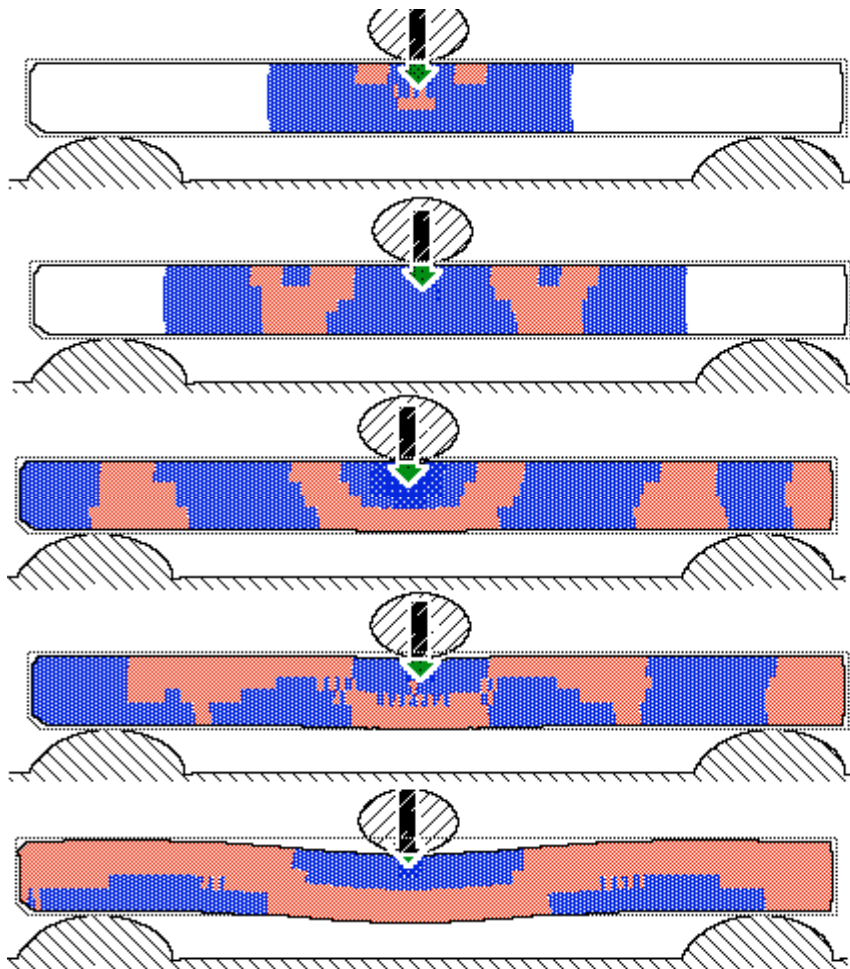


FIGURE 1 - Essai de flexion-choc ou résilience sur éprouvette lisse.

### Résilience sur éprouvette lisse

Cet essai, utilisé pour certaines matières plastiques, correspond pratiquement à un essai de flexion en trois points. Le barreau s'appuie sur deux couteaux fixes. La déformation est appliquée par un couteau supérieur mobile se déplaçant à vitesse constante.

On observe sur la figure 1 la propagation de l'onde créée par l'impact du couteau mobile le long de l'éprouvette. L'onde de pression présente des alternances en traction et compression. Après un ou deux allers et retours, on observe une relative homogénéisation mais la flexion reste localisée au centre de l'éprouvette. C'est cette localisation qui explique (en partie) la fragilisation au choc.

### Résilience Charpy sur éprouvette entaillée

L'essai sur éprouvette entaillée est plus utilisé mais nécessite un maillage qui devrait être plus fin que le rayon en fond d'entaille. Les dimensions de l'éprouvette en polycarbonate sont de 4 cm pour la hauteur, de 20 cm pour la longueur hors tout et une profondeur de 1 cm. La vitesse d'impact est de 10 m/s, celle des ondes longitudinales de 2100 m/s et celle des ondes transversales de 870 m/s. La limite élastique est de 69 MPa et la résistance en traction de 100 MPa. La masse spécifique étant de 1000 kg/m<sup>3</sup>, le module d'élasticité est de 2100 MPa et le coefficient de Poisson de 0,4.

La figure 2 montre la formation de deux zones plastifiées (vues c et suivantes, en hachures), sous le couteau et au voisinage de l'entaille.

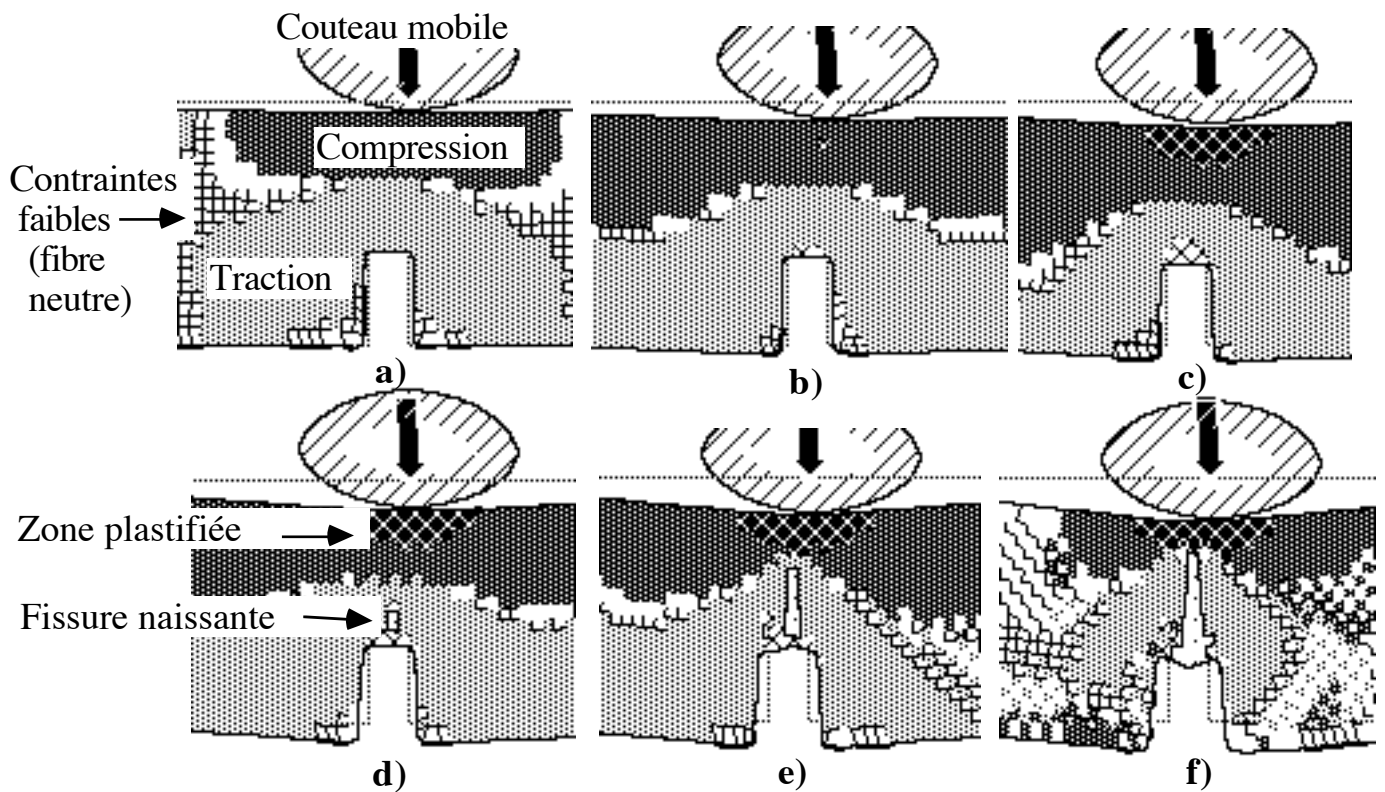


FIGURE 2 - Déformation et rupture dans la partie centrale d'une éprouvette Charpy entaillée.

Une fissure apparaît à l'interface élastique-plastique (vue d), conformément à la théorie de la plasticité et aux observations (fig. 3) dans le matériau transparent simulé, le polycarbonate qui présente, dans certaines conditions, une rupture fragile [8].

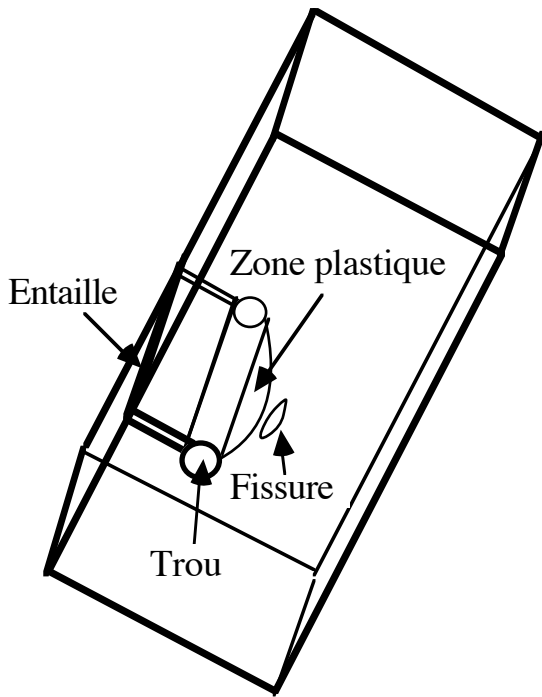


FIGURE 3 - Formation d'une fissure à l'interface élastique-plastique dans le polycarbonate.

La figure 4 montre la variation de l'effort appliqué qui présente trois maximums correspondant aux vibrations générées par le choc. dans l'éprouvette, que l'on observe sur les essais Charpy instrumentés [7]. L'énergie absorbée est d'une dizaine de kilojoules par  $m^2$ , en accord avec les valeurs expérimentales en déformation plane [13]. Il est à noter que la méthode de simulation numérique ne fait pas appel à la notion de facteur d'intensité de contraintes: elle est basée uniquement sur les propriétés mécaniques classiques en résistance des matériaux, mesurées sur éprouvettes de traction et compression. On remarque que le volume de l'éprouvette augmente à l'apparition de la fissure, après le second maximum. La vitesse de propagation de la fissure est de 200 m/s, valeur tout à fait réaliste.

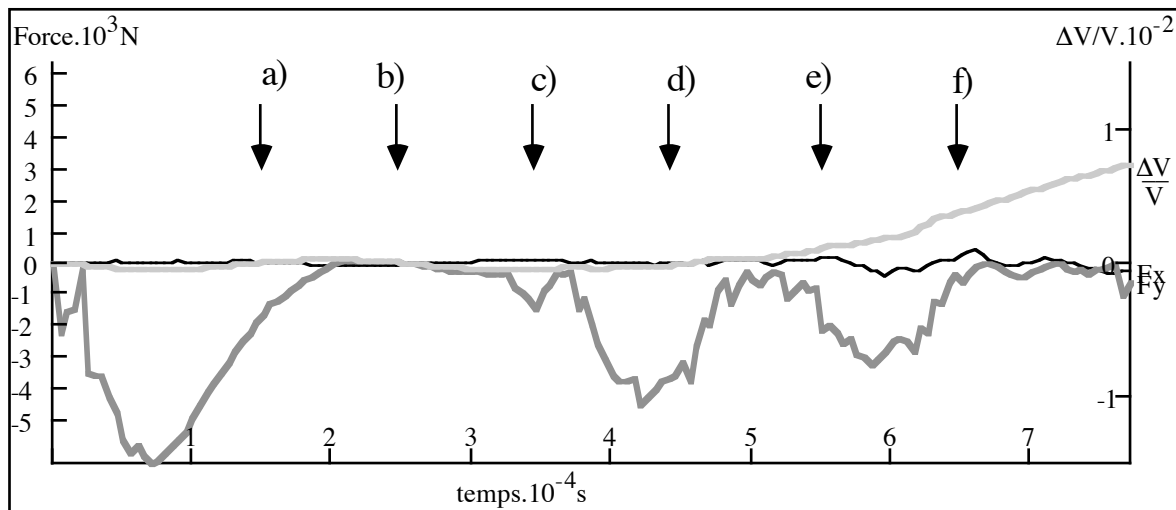


FIGURE 4 - Evolution de l'effort appliqué. Les flèches indiquent la correspondance avec les vues de la figure 2. L'effort est toujours négatif (contact unilatéral: la force ne peut s'exercer que vers le bas).

## CONCLUSIONS

Les exemples présentés concernent des essais quasi-statiques ou dynamiques. La durée d'un calcul dans des conditions quasi-statiques est toutefois acceptable même sur microordinateur, à condition d'effectuer l'expérience numérique à une vitesse nettement supérieure aux vitesses habituelles des machines de traction. Le dépouillement des essais de propriétés mécaniques est généralement basé sur l'hypothèse d'une déformation homogène assez peu réaliste dès qu'on sort du domaine des petites déformations. Dans les essais de choc, où la propagation des ondes ne peut être négligée, la courbe effort-déplacement n'a plus rien de commun avec la courbe contrainte-déformation. Déform2D permet de mieux comprendre la signification de ce type d'essais. De plus, il est un des rares, sinon le seul, logiciel simulant la génération et la propagation des fissures dans une direction non définie à l'avance.

La comparaison calcul-expérience montre un bon accord qualitatif. Pour une validation précise, on devrait effectuer des expériences, par exemple des essais de traction à grande vitesse, de préférence avec prises de vues cinématographiques, les déformations étant visualisées par la méthode des moirés [9]. Toutes les informations nécessaires au calcul seraient recueillies simultanément, les données trouvées dans la littérature étant rarement complètes.

### REFERENCES

- /1/ SCHAEFFER, B, Programme bidimensionnel de simulation numérique du comportement dynamique des milieux continus déformables, Optimisation des structures et CAO, FEMCAD 87, Hermès, Paris, (1987) 186
- /2/ FUNG, Y C, Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1965)
- /3/ HUNTER, S C, Mechanics of Continuous Media, Wiley, New York (1983)
- /4/ PERSOZ, B, Introduction à l'étude de la rhéologie, Dunod, Paris (1960)
- /5/ REINER, M, Rheology, Theory and Applications, EIRICH, FR. , Editor, Vol. 1, Academic Press, New York (1956) 9
- /6/ HIRT, C W, Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations, J. Comp. Phys. 2 (1968) 339
- /7/ DEAR, J P, MACGILLIVRAY, J H , On-specimen sensors for high velocity impact testing of polymers, ECF8, Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures, Turin (1990) 169
- /8/ MILLS, N J, The mechanism of brittle fracture in notched impact tests on polycarbonate, J. Mat. Sci. 11 (1976) 363
- /9/ SCHAEFFER B, LIU, H W, KE, J S, Deformation and the Strip Necking Zone in a Cracked Steel Sheet, J. Exp. Mech. (1971) 172.