Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$.

1. étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = 2x - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en + ∞.
2. Démontrer que la courbe C admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.

Étudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ.

3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
5. Tracer la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D du plan compris entre la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm², est donnée par : $I_n = 2\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

2. *a*. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine D quand n tend vers + ∞.

CORRECTION

Partie A

1. g est la somme de fonction dérivables sur] 0 ; + ∞ [donc est dérivable sur] 0 ; + ∞ [.

$g'(x) = 6x^2 + \dfrac{2}{x}$, $x > 0$ donc $g'(x)$ est la somme de termes strictement positifs donc $g'(x) > 0$ sur] 0 ; + ∞ [.

g est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x^3 - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

g est continue strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ $g(x) = +\infty$ donc il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

$g(0{,}86) \approx -0{,}03$

$g(0{,}87) \approx 0{,}04$ donc $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$ donc $\alpha = 0{,}87$ à 10^{-2} près par excès.

3. g est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $g(\alpha) = 0$ donc : si $0 < x < \alpha$ alors $g(x) < 0$; $g(\alpha) = 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

x	0		α		+ ∞
$\ln x$		–	0	+	

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \times \ln x$ or $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

2. $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$ donc la courbe C admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.

$f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$f(x) - 2x$		$+$	0	$-$	

La courbe C est au dessus de Δ sur] 0 ; 1 [; la courbe C coupe Δ au point d'abscisse 1 ; la courbe C est en dessous de Δ sur] 1 ; + ∞ [

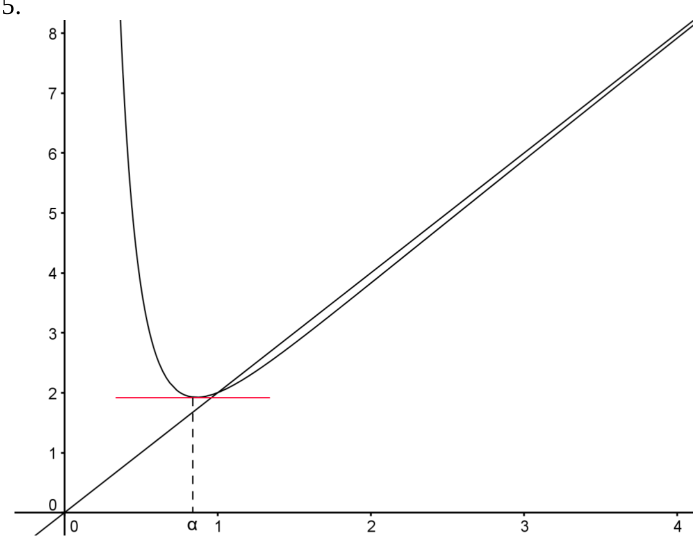
3. $f'(x) = 2 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 2 - \dfrac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \dfrac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, $x > 0$ donc $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

4.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5.



Partie C

1. l'aire du domaine D du plan compris entre la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$ a pour mesure $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ en unités d'aire.

1 unité d'aire a pour mesure 2×1 cm^2 donc cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par : $2\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

2. *a.* Soit $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x^2} & u(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^n - \left[\frac{1}{x}\right]_1^n$

$\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln n}{n} - \left(\frac{1}{n} - 1\right)$ donc $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$

b. $\mathrm{I}_n = 2\left(1 - \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{1}{n}\right)$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{I}_n = 2$