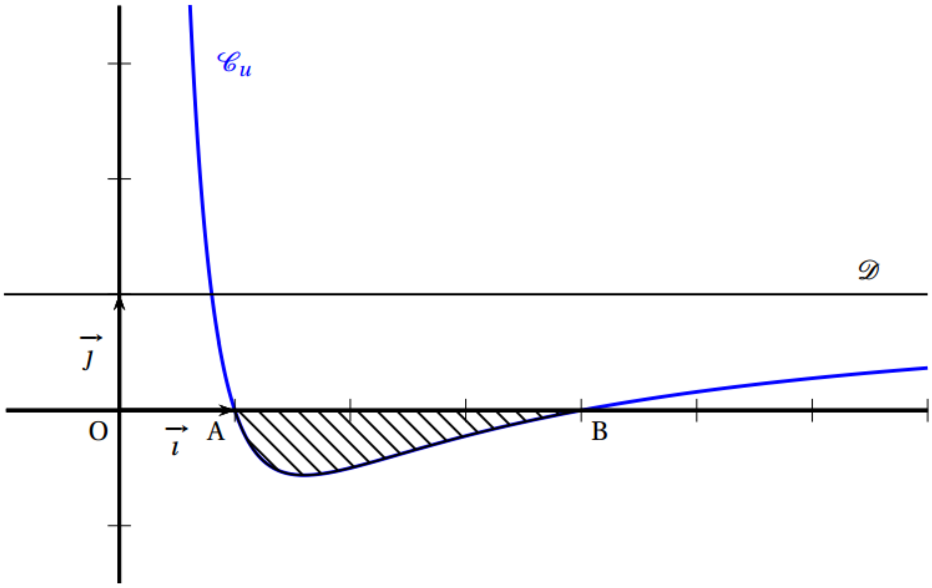
Amérique du Sud novembre 2015

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C_u la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$, où a, b et c sont des réels fixés.



On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe C_u et la droite D d'équation $y = 1$.
On précise que la courbe C_u passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite D sont asymptotes à la courbe C_u.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

2. Donner $\lim_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.

En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire A, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la partie A.

2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note A_λ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que $4 \le x \le \lambda$ et $0 \le y \le u(x)$.

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $A_\lambda = A$?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :

$$A(3\,;-1\,;4),\ B(-1\,;2\,;-3),\ C(4\,;-1\,;2).$$

Le plan P a pour équation cartésienne : $2x-3y+2z-7=0$.

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1+4t \\ y=4-t \\ z=-8+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.
Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.
Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont données par :

$$\begin{cases} x = 1+s-2s' \\ y = 1-2s+s' \\ z = 1-4s+2s' \end{cases},\ s \in \mathbb{R},\ s' \in \mathbb{R} \text{ appartiennent au plan P}.$$

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan P qui contient la droite Δ.

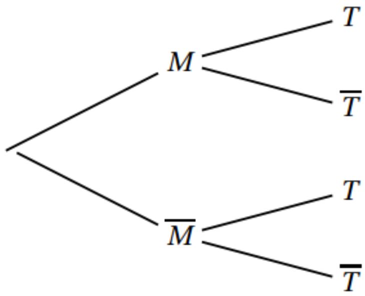
EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.
Un test *a* été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :
— la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
— la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population.
On appelle :
— M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
— T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »
On notera $\overline{M}$ (respectivement $\overline{T}$) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).
On note p $(0 \leq p \leq 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. *a.* Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Exprimer $P(M \cap T)$, $P(\overline{M} \cap T)$ puis $P(T)$ en fonction de p.

2. *a.* Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par : $f(p) = \dfrac{98p}{97p+1}$.

b. Étudier les variations de la fonction f.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
En utilisant les résultats de la question 2., à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Partie B

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.
Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.
Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et par F la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

1. *a.* Sous l'hypothèse $p = 0{,}15$, déterminer la loi de X.

b. Dans un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus.
Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l'institut de veille sanitaire ?
Justifier. (On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.)

2. On considère désormais que la valeur de p est inconnue.
En utilisant l'échantillon de la question 1. *b.*, proposer un intervalle de confiance de la valeur de p, au niveau de confiance de 95 %.

Partie C

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'écart type $\sigma = 10$.

On souhaite déterminer sa moyenne μ.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de T est donnée en annexe.

1. *a.* Conjecturer, à l'aide du graphique, une valeur approchée de μ.

b. On donne $p(T < 110) = 0,18$. Hachurer sur le graphique un domaine dont l'aire correspond à la probabilité donnée.

2. On note T′ la variable aléatoire égale à $\dfrac{T-\mu}{10}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire T′ suit-elle ?

b. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de la moyenne μ de la variable aléatoire T et vérifier la conjecture de la question 1.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année 2010 + n, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année 2010 + n, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.

2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	*n*	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
...	...	...	
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85\, u_n + 6$.

1. *a.* Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.

Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n > 0$.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u > 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $0{,}85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Que fait cet algorithme ?

b. Quelle valeur affiche-t-il ?

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

• en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
• chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
• chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

• R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$,
• C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\,U_n$.

b. Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.

4. *a.* On pose $\Delta = P^{-1} M P$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.

b. Démontrer que : $M = P \Delta P^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = P \Delta^n P^{-1}$.

5. *a.* On admet que le calcul matriciel précédent donne : $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0{,}85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0{,}85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0{,}85^n \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0{,}85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?

6. *a.* On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante.

Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

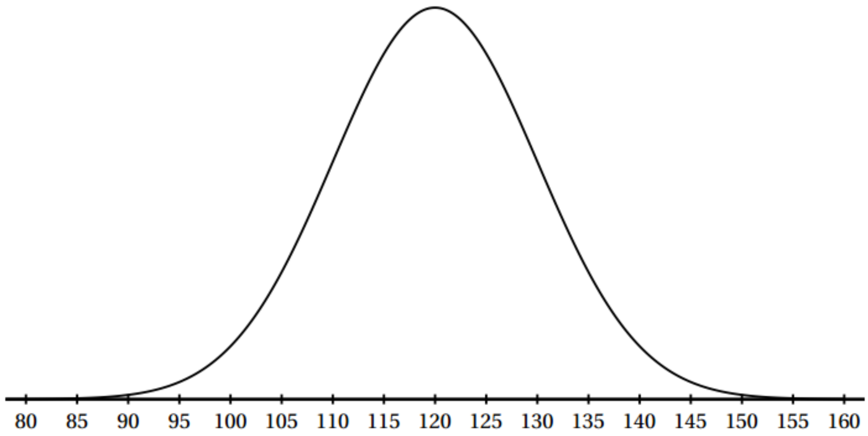
b. En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50 \times 0{,}85^n + 40 \leq 80 - 50 \times 0{,}85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme.

Annexe

Exercice 3 Partie C Question 1

(à compléter et à remettre avec la copie)

Courbe représentative de la fonction densité de la loi normale N



Exercice 4 Spécialité Question 6 (à compléter et à remettre avec la copie)

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	R prend la valeur 90
	C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que ...... faire
	n prend la valeur ...
	R prend la valeur $50 \times 0{,}85^n + 40$
	C prend la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Correction

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. La courbe C_u passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) donc $u(1) = 0$ et $u(4) = 0$

donc $u(1) = a + b + c = 0$ et $u(4) = a + \frac{b}{4} + \frac{c}{16} = 0$

2. la droite D est asymptote à la courbe C_u en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = a$ donc $a = 1$

3. En remplaçant dans $a + b + c = 0$ et $a + \frac{b}{4} + \frac{c}{16} = 0$, b et c sont solutions de $\begin{cases} b + c = -1 \\ \frac{b}{4} + \frac{c}{16} = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b + c = -1 \\ 4b + c = -16 \end{cases}$ donc par différence terme à terme : $3b = -15$ soit $b = -5$

$b + c = -1$ donc $c = -b - 1$ soit $c = 4$ donc pour tout réel x strictement positif, $u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}$ soit $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

1. $f(x) = x - \frac{x \ln x + 4}{x}$ or $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x + 4 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x \ln x + 4}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

2. $f(x) = x\left(1 - 5\frac{\ln x}{x}\right) - \frac{4}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 5\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - 5\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3. Pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 - \frac{5}{x} - 4 \times \frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}$ donc $f'(x) = u(x)$.

$x^2 > 0$ donc $u(x)$ a le même signe que $x^2 - 5x + 4$
$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$ donc $u(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\,1\,;\,4\,[$

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$3 - 5\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. Pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$ donc f est une primitive de u sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

La fonction u est négative sur $[1\,;\,4]$ donc $A = \int_1^4 -u(x)\,dx = \left[-f(x)\right]_1^4 = -f(4) + f(1) = -3 + 5\ln 4 - 3 = 5\ln 4 - 6$ unités d'aires

2. Sur $[4\,;\,\lambda]$ $(\lambda \geq 4)$ la fonction u est positive donc $A_\lambda = \int_4^\lambda u(x)\,dx = \left[f(x)\right]_4^\lambda = f(\lambda) - f(4) = \lambda - 5\ln\lambda - \dfrac{4}{\lambda} - 3 + 5\ln 4$

$A_\lambda = A \Leftrightarrow f(\lambda) - f(4) = f(1) - f(4) \Leftrightarrow f(\lambda) = f(1) \Leftrightarrow f(\lambda) = -3$
$f(4) = 3 - 5\ln 4 \approx -3{,}93$
La fonction f est définie continue strictement croissante sur $[4\,;\,+\infty\,[$, $f(4) < -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc l'équation $f(x) = -3$ admet une seule solution sur $[4\,;\,+\infty\,[$.

Non demandé :
$f(7) \approx -3{,}30$ et $f(8) \approx -2{,}90$ donc $\lambda \in [7\,;\,8]$
On peut augmenter la précision : $f(7{,}7) \approx -3{,}03$ et $f(7{,}8) \approx -2{,}98$ donc $\lambda \in [7{,}7\,;\,7{,}8]$ etc.

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Affirmation 1 : VRAIE
Le vecteur $\vec{u}\,(4\,;\,-1\,;\,2)$ est un vecteur directeur de Δ, la droite (AC) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AC}\,(1\,;\,0\,;\,-2)$
$\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times (-2) = 0$ donc les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2 : VRAIE
$\overrightarrow{AB}\,(-4\,;\,3\,;\,-7)$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C déterminent un plan
$2x_A + 5y_A + z_A - 5 = 6 - 5 + 4 - 5 = 0$ donc A appartient au plan d'équation cartésienne $2x + 5y + z - 5 = 0$.
$2x_B + 5y_B + z_B - 5 = -2 + 10 - 3 - 5 = 0$ donc B appartient au plan d'équation cartésienne $2x + 5y + z - 5 = 0$.
$2x_C + 5y_C + z_C - 5 = 8 - 5 + 2 - 5 = 0$ donc C appartient au plan d'équation cartésienne $2x + 5y + z - 5 = 0$.
Le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + 5y + z - 5 = 0$.

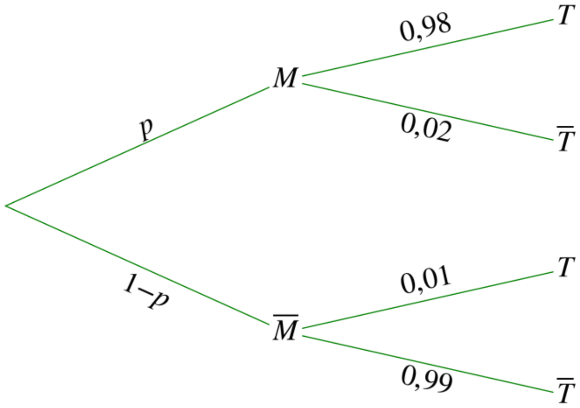
Affirmation 3 : FAUSSE
Le plan P a pour équation cartésienne : $2x - 3y + 2z - 7 = 0$.
Soit M $(1 + s - 2s'\,;\,1 - 2s + s'\,;\,1 - 4s + 2s')$
$2(1 + s - 2s') - 3(1 - 2s + s') + 2(1 - 4s + 2s') - 7 = 2 + 2s - 4s' - 3 + 6s - 3s' + 2 - 8s + 4s' - 7$
$2(1 + s - 2s') - 3(1 - 2s + s') + 2(1 - 4s + 2s') - 7 = -6 + 3s'$ donc si $s' \neq 2$, le point M n'appartient pas au plan P.

Affirmation 4 : FAUSSE
S'il existe un plan parallèle au plan P qui contient la droite Δ alors Δ est parallèle à P
Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;\,-3\,;\,2)$ donc $\vec{n}\,.\,\vec{u} = 2 \times 4 + (-3) \times (-1) + 2 \times 2 = 8 + 3 + 4 = 15$
$\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux donc la droite Δ n'est pas parallèle au plan P, il n'existe pas de plan parallèle au plan P qui contient la droite Δ.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. ***a.***



b. $P(M \cap T) = 0{,}98\,p$, $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}01\,(1-p)$

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}98\,p + 0{,}01\,(1-p)$

donc $P(T) = 0{,}01 + 0{,}97\,p$

2. ***a.*** $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}98\,p}{0{,}97 + 0{,}01} = \dfrac{100 \times 0{,}98\,p}{100\,(0{,}97\,p + 0{,}01)}$

donc $P_T(M) = f(p) = \dfrac{98\,p}{97\,p + 1}$.

b. La fonction f est une fonction rationnelle définie sur [0 ; 1] donc est dérivable sur [0 ; 1].

$f'(p) = \dfrac{98\,(97\,p+1) - 97 \times 98\,p}{(97\,p+1)^2} = \dfrac{98}{(97\,p+1)^2}$, la fonction f est donc strictement croissante sur [0 ; 1].

3. Le test est fiable si et seulement si $f(p) > 0{,}95$ soit $98\,p > 0{,}95\,(97\,p + 1) \Leftrightarrow 98\,p > 92{,}15\,p + 0{,}95 \Leftrightarrow 5{,}85\,p > 0{,}95$ $\Leftrightarrow p > \dfrac{0{,}95}{5{,}85} \Leftrightarrow p > \dfrac{19}{117}$. Le test est fiable à partir de $\dfrac{19}{117}$ soit environ 16,2 % de malades dans la population.

Partie B

1. ***a.*** On a une succession de 1 000 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- la personne est atteinte par le virus ($p = 0{,}15$)
- la personne n'est pas atteinte par le virus ($q = 1 - p = 0{,}85$)

donc la variable aléatoire X qui, à tout échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus suit une loi binomiale de paramètres (1 000 ; 0,15)

b. Dans un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus donc la fréquence observée est $f = 0{,}197$.

$n = 1000$, $n\,p = 150$ et $n\,(1-p) = 850$ donc $n > 30$, $n\,p > 5$ et $n\,(1-p) > 5$ donc il est possible de déterminer un intervalle de fluctuation I de la fréquence F de personnes malades au seuil de 95 % :

$$I = \left[\, p - 1{,}96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \; ; \; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \,\right]$$ avec $p = 0{,}15$ et $n = 1\,000$

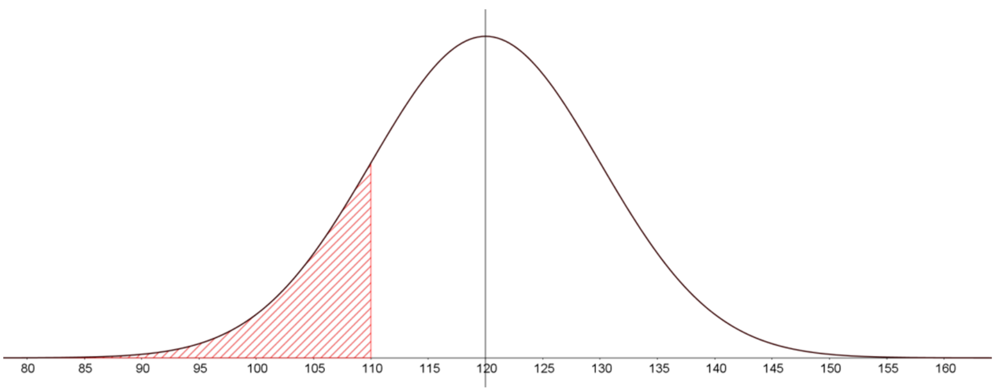
$I \approx [0{,}127 ; 0{,}173]$ Comme $0{,}197 \notin [0{,}127 ; 0{,}173]$ on peut en déduire que l'hypothèse d'un pourcentage de 15 % est sous-erronée.

2. On a constaté une fréquence $f_{obs} = 0{,}197$ donc un intervalle de confiance de la valeur de p, au niveau de confiance de 95 % est $\left[f_{obs} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f_{obs} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec $f_{obs} = 0{,}197$ et $n = 1\,000$ soit un intervalle de confiance [0,165 ; 0,229].

Partie C

1. ***a.*** La courbe admet la droite d'équation $x = 120$ pour axe de symétrie donc on peut conjecturer, à l'aide du graphique, que $\mu \approx 120$.

b.



2. ***a.*** La variable aléatoire T suit une loi normale d'écart type $\sigma = 10$ de moyenne μ donc la variable aléatoire T′ suit une loi normale centrée réduite.

b. $p(T < 110) = 0{,}18 \Leftrightarrow p\left(T' < \dfrac{110-\mu}{10}\right) = 0{,}18 \Leftrightarrow \dfrac{110-\mu}{10} = -0{,}915 \Leftrightarrow 110 + 9{,}15 = \mu \Leftrightarrow \mu = 119{,}15$

Une valeur approchée à l'unité près de la moyenne μ de la variable aléatoire T est donc 119 ce qui est cohérent avec la conjecture émise à la question 1.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. La population totale est constante par une relation liant u_n et v_n donc $u_n + v_n = 120$

2. Chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville donc 90 % restent à la campagne ; et chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale donc $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 0{,}05\,v_n$
On obtient de même que $v_{n+1} = 0{,}1\,u_n + 0{,}95\,v_n$
En B3 il faut donc écrire = 0,9 * B2 + 0,05 * C2
En C3 il faut donc écrire = 120 – B3 ou = 0,1 * B2 + 0,95 * C2.

3. **Conjecture :** à long terme long terme un tiers de cette population habitera à la campagne et deux tiers en ville.

Partie B

1. *a.* **Initialisation :** $u_0 = 90$, $u_1 = 82{,}5$ donc $u_0 > u_1$
Hérédité : montrons que pour tout n de N, si $u_{n+1} > u_n$ alors $u_{n+2} > u_{n+1}$
$u_{n+1} > u_n$ donc $0{,}85\,u_{n+1} > 0{,}85\,u_n$ donc $0{,}85\,u_{n+1} + 6 > 0{,}85\,u_n + 6$ donc $u_{n+2} > u_{n+1}$, la propriété est héréditaire.
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc converge vers une limite positive.

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n > 0$.
a. $u_{n+1} - 40 = 0{,}85\,u_n + 6 - 40 = 0{,}85\,u_n - 34$ or $w_n = u_n - 40$ donc $u_n = w_n + 40$ donc $w_{n+1} = 0{,}85\,(w_n + 40) - 34 = 0{,}85\,w_n$
(w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

b. $w_n = 0{,}85^n\,w_0$ or $w_0 = u_0 - 40 = 50$ donc $w_n = 0{,}85^n \times 50$ donc $u_n = w_n + 40 = 0{,}85^n \times 50 + 40$

c. $u_n + v_n = 120$ donc $v_n = 120 - u_n$ soit $v_n = 80 - 0{,}85^n \times 50$.

3. $-1 < 0{,}85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 80$, les conjectures sont validées.

4. *a.* Dans cet algorithme, u est initialisé par 90 et on calcule $0{,}85 \times u + 6$ donc u représente u_n soit la population rurale
$120 - u$ représente donc la population urbaine, l'algorithme s'arrête quand $u > 120 - u$ soit quand la population rurale est inférieure à la population urbaine.
Cet algorithme affiche le nombre d'années n, au bout duquel la population rurale sera inférieure à la population urbaine.

b. D'après le tableur, $u_5 > v_5$ et $u_6 < v_6$ donc la valeur affichée sera 6.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a. Chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville donc 90 % restent à la campagne ; et chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale donc $R_{n+1} = 0,9\, R_n + 0,05\, C_n$ et de même $C_{n+1} = 0,1\, R_n + 0,95\, C_n$

donc $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,9 R_n + 0,05 C_n \\ 0,1 R_n + 0,95 C_n \end{pmatrix}$ or $M\, U_n = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 R_n + 0,05 C_n \\ 0,1 R_n + 0,95 C_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$

donc, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\, U_n$.

b. $U_0 = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$ donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0,9 \times 90 + 0,05 \times 30 \\ 0,1 \times 90 + 0,95 \times 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}$

En 2011, le nombre de ruraux est de 82 500 et le nombre de citadins est de 37 500.

2. Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\, U_n$ donc $U_n = M^n\, U_0$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ donc la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P.

4. *a.* A l'aide de la calculatrice, $\Delta = P^{-1} M\, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}$

b. $P\, \Delta\, P^{-1} = P\, (P^{-1} M\, P)\, P^{-1} = (P\, P^{-1})\, M\, (P\, P^{-1})$ or $P\, P^{-1} = I_2$ donc $P\, \Delta\, P^{-1} = M$

c. **Initialisation :** $n = 1$, $M = P\, \Delta\, P^{-1}$ donc la propriété est vraie au rang 1.
Hérédité : montrons pour tout n de N* que si $M^n = P\, \Delta^n\, P^{-1}$ alors $M^{n+1} = P\, \Delta^{n+1}\, P^{-1}$.
$M^{n+1} = M \times M^n = P\, \Delta\, P^{-1}\, P\, \Delta^n\, P^{-1}$ or $P\, P^{-1} = I_2$ donc $M^{n+1} = P\, \Delta\, \Delta^n\, P^{-1}$ donc $M^{n+1} = P\, \Delta^{n+1}\, P^{-1}$.
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = P\, \Delta^n\, P^{-1}$.

5. *a.* $U_n = M^n\, U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,85^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,85^n \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0,85^n & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0,85^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,85^n\right)+30\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,85^n\right) \\ 90\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0,85^n\right)+30\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times 0,85^n\right) \end{pmatrix}$

donc $R_n = 30 + 60 \times 0,85^n + 10 - 10 \times 0,85^n$ soit $R_n = 40 + 50 \times 0,85^n$
La population est constante et égale à 120 donc $R_n + C_n = 120$ donc $C_n = 120 - R_n = 80 - 50 \times 0,85^n$.

b. $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 40$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 80$,

A long terme 40 000 habitants soit un tiers de cette population habitera à la campagne et 80 000 habitants soit deux tiers en ville.

6. *a.*

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	R prend la valeur 90
	C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que **R ≥ C** faire
	n prend la valeur ***n* + 1**
	R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$
	C prend la valeur **120 – R (ou C prend la valeur 80 – 50 × $0,85^n$)**
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

b. $50 \times 0,85^n + 40 \leq 80 - 50 \times 0,85^n \Leftrightarrow 100 \times 0,85^n \leq 40 \Leftrightarrow 0,85^n \leq 0,4 \Leftrightarrow n \ln 0,85 \leq \ln 0,4 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,85}$ ($\ln 0,85 < 0$)

$\dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,85} \approx 5,6$ donc $50 \times 0,85^n + 40 \leq 80 - 50 \times 0,85^n \Leftrightarrow n \geq 6$