EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

A – Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre- exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

• $P_1 \cap P_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans P_1 et P_2.

• L'écriture $P_1 \cap P_2 = \varnothing$; signifie que les plans P_1 et P_2 n'ont aucun point commun.

1. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$; et $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$ alors on peut conclure que P_1 et P_3 vérifient : $P_1 \cap P_3 \neq \varnothing$.

2. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \varnothing$; alors on peut conclure que P_1, P_2 et P_3 sont tels que : $P_1 \cap P_2 = \varnothing$; et $P_2 \cap P_3 = \varnothing$.

3. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$; et $P_1 \cap P_3 = \varnothing$, alors on peut conclure que P_2 et P_3 vérifient : $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$.

4. Si P_1 et P_2 sont deux plans distincts et D une droite de l'espace vérifiant : $P_1 \cap D \neq \varnothing$; et $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, alors on peut conclure que $P_2 \cap D \neq \varnothing$.

B – Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

- P_1 d'équation $x + y - z = 0$
- P_2 d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- P_3 d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.
2. En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ tels que :

– le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;

– chacun des suivants, $S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

– on tire au hasard une bille dans S_1 ;

– on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;

– on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;

– etc.

Pour tout entier $n > 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\overline{E_1}}(E_2)$.

En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

b. Démontrer que (u_n) est croissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Évolution des probabilités $p(E_n)$

a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0{,}499\,99 \leq p(E_n) \leq 0{,}5$?

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x ; y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. On note $R_{a, b}$ ce réseau.

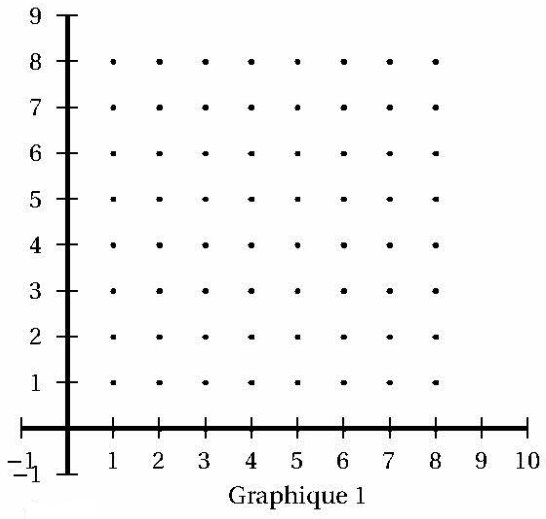
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur l'annexe.

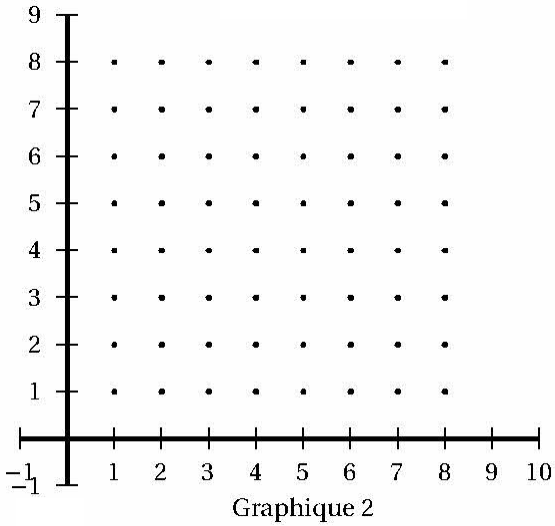
Représenter graphiquement les points M$(x ; y)$ du réseau $R_{8, 8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2$ (3) et $y \equiv 1$ (3)



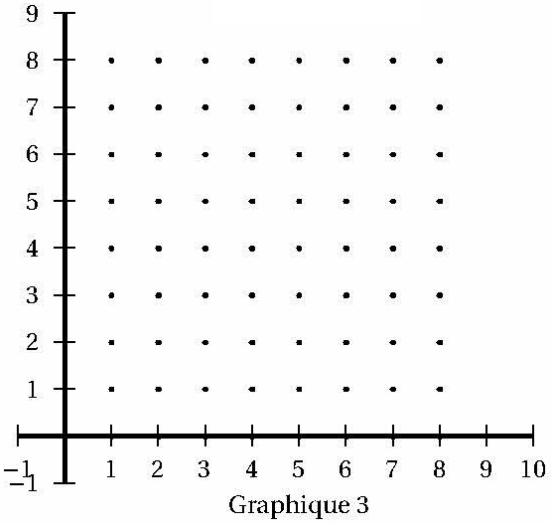
Graphique 1

2. $x + y \equiv 1$ (3)



Graphique 2

3. $x \equiv y$ (3)



Graphique 3

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0 ; y_0)$ solution de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x ; y)$ pour laquelle le point $M(x ; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4, 7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale [OA] du réseau $R_{a, b}$, avec O(0 ; 0) et A$(a ; b)$.

1. Démontrer que les points du segment [OA] sont caractérisés par les conditions : $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$; $a y = b x$.

2. Démonter que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a, b}$.

3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment [OA] contient au moins un autre point du réseau.

(On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.)

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats

A – Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$.

B – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)\,e^{-x}$.

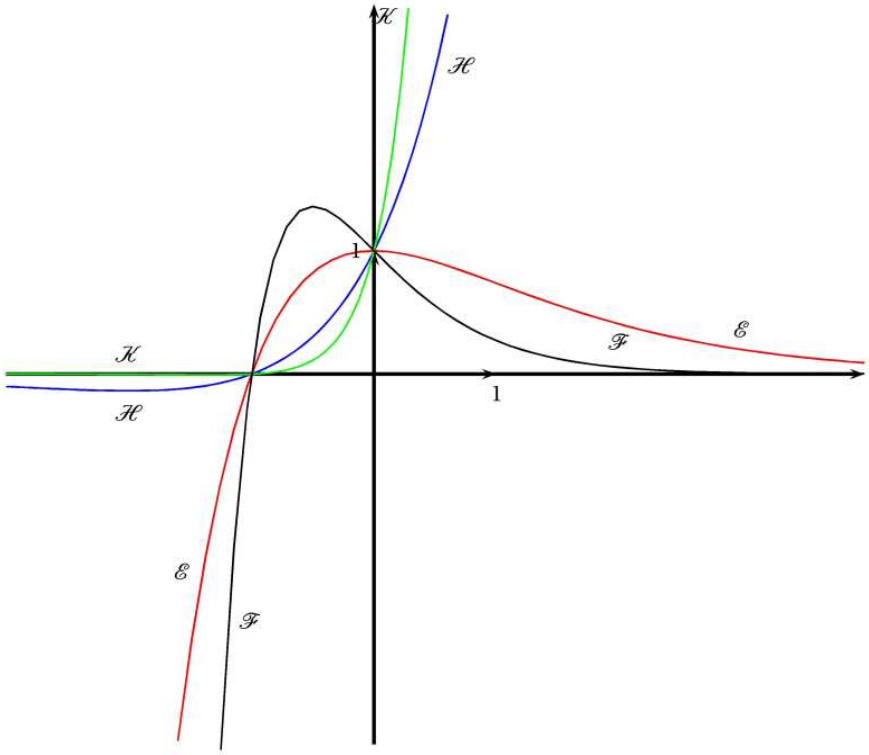
On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*
Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe (C). On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C – Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x + 1)\,e^{kx}$.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.
On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $C_{-1} = C$.
1. *a*. Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
b. Déterminer les points d'intersection des courbes C_0 et C_1. Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe C_k.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x + 1)(e^x - 1)$.
En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes C_k et C_{k+1}.
3. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)
4. Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers −1, − 3, 1 et 2.
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



D – Calcul d'une aire plane

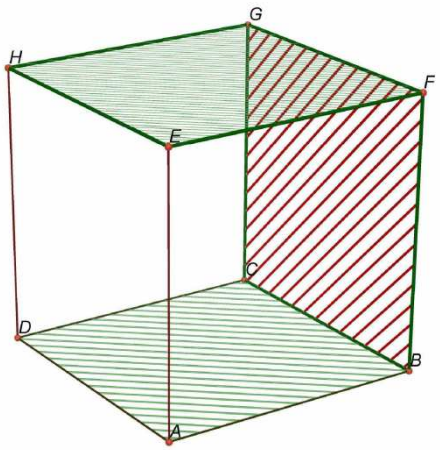
Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est celle définie dans la partie B.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer ce nombre : $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(t)\,dt$

2. Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats



1. **FAUX :**

Dans le cube ABCDEFGH, soit P_1 le plan (ABC), P_2 le plan (BCF), P_3 le plan (EFG),
les plans (ABC), (BCF) ont une intersection non vide : (BC) donc $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$;
les plans (EFG), (BCF) ont une intersection non vide : (GF) donc $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$
et les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles donc ont une intersection vide donc $P_1 \cap P_3 = \varnothing$.

2. **FAUX**

Avec les notations précédentes, les plans P_1 et P_3 sont strictement parallèles donc $P_1 \cap P_3 = \varnothing$ et $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \varnothing$; or $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$.

3. **Faux**

$P_1 \cap P_3 = \varnothing$, alors les plans P_1 et P_3 sont strictement parallèles $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$ donc soit $P_1 \cap P_2$ est une droite, soit c'est un plan.
Si $P_1 \cap P_2$ est un plan $P_1 = P_2$ donc $P_2 \cap P_3 = \varnothing$.

4. **Faux**

Si $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, alors les plans P_1 et P_2 sont strictement parallèles
$P_1 \cap D \neq \varnothing$, l'intersection non vide d'une droite et d'un plan est soit un point soit une droite
Si $P_1 \cap D$ est une droite, alors D est contenue dans P_1
or $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, donc en particulier $P_2 \cap D = \varnothing$.

B – Intersection de trois plans donnés

1. P_1 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ (1 ; 1 ; – 1) P_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ (2 ; 1 ; 1)

ces deux vecteurs sont non colinéaires donc les plans P_1 et P_2 sont sécants
Soit A le point d'abscisse 0 appartenant à $P_1 \cap P_2$ alors son ordonnée y_A et sa cote z_A vérifient :

$\begin{cases} x_A + y_A - z_A = 0 \\ 2x_A + y_A + z_A = 3 \end{cases}$ donc par addition terme à terme $2 y_A = 3$ donc $y_A = z_A = \dfrac{3}{2}$

A a pour coordonnées $\left(0 ; \dfrac{3}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$

Soit B le point d'ordonnée 0 appartenant à $P_1 \cap P_2$ alors son abscisse x_B et sa cote z_B vérifient :

$\begin{cases} x_B + y_B - z_B = 0 \\ 2x_B + y_B + z_B = 3 \end{cases}$ donc par addition terme à terme $3 x_B = 3$ donc $x_B = z_B = 1$

B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1)

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de Δ

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(1 ; -\dfrac{3}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$ donc le vecteur $\vec{u} = 2\ \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de Δ

$\vec{u}$ a pour coordonnées (2 ; – 3 ; – 1)

Un point M appartient à Δ si et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2k \\ y = -3k \\ z - 1 = -k \end{cases}$

donc une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -3k \\ z = 1 - k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

2. L'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est l'intersection de Δ et de P_3 donc est telle que $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -3k \\ z = 1 - k \end{cases}$ et $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

en remplaçant : $1 + 2k - 6k - 4(1 - k) + 3 = 0$ soit $0 = 0$
Tout point de Δ appartient à P_3 donc $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \Delta$

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. E_1 est l'évènement : « la bille tirée dans S_1 est verte » donc $p(E_1) = \frac{2}{5}$

Si la bille tirée dans S_1 est verte, on la place dans S_2 qui contient donc 2 billes jaunes et 3 vertes. $p_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5}$.

Si la bille tirée dans S_1 n'est pas verte, on la place dans S_2 qui contient donc 3 billes jaunes et 2 vertes. $p_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5}$.

$p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p(\overline{E_1} \cap E_2) = p_{E_1}(E_2) \times p(E_1) + p_{\overline{E_1}}(E_2) \times p(\overline{E_1})$

$p(E_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$

b. $p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p_{E_n}(E_{n+1}) \times p(E_n) + p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times p(\overline{E_n})$

Si la bille tirée dans S_n est verte, on la place dans S_{n+1} qui contient donc 2 billes jaunes et 3 vertes. $p_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{5}$.

Si la bille tirée dans S_n n'est pas verte, on la place dans S_{n+1} qui contient donc 3 billes jaunes et 2 vertes. $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{2}{5}$.

$p(E_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{5} + (1 - p_n) \times \frac{2}{5}$ donc $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$.

2. Étude d'une suite

a. $u_1 = \frac{2}{5}$, donc $u_1 \leq \frac{1}{2}$ la propriété est vraie pour $n = 1$

Montrons pour tout n de $\mathbb{N}^*$, que si $u_n \leq 1$ alors $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

si $u_n \leq 1$ alors $\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ soit $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$. La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}u_n = \frac{2}{5}(1 - 2u_n)$ or pour tout n de N*, $u_n \leq \frac{1}{2}$ donc $1 - 2u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

(u_n) est croissante.

c. (u_n) est croissante majorée par $\frac{1}{2}$ donc est convergente et sa limite L est telle que $L \leq \frac{1}{2}$.

$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ donc L est solution de $x = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$ donc $5x = x + 2$ soit $x = \frac{1}{2}$ donc $L = \frac{1}{2}$.

3. *a.* $p(E_n)$ vérifie les mêmes conditions que la suite (u_n) donc $p(E_n) = u_n$ et la limite de $p(E_n)$ quand n tend vers $+\infty$ est $\frac{1}{2}$.

b. Soit $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ alors $v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{10} = \frac{1}{5}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ de premier terme $v_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$ donc $v_n = v_1 q^{n-1} = -\frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$0{,}499\,99 \leq p(E_n) \leq 0{,}5 \Leftrightarrow -10^{-5} \leq p(E_n) - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -10^{-5} \leq -\frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \leq 0 \Leftrightarrow 10^{-5} \geq \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Leftrightarrow 10^5 \leq 10 \times 5^{n-1}$

$\Leftrightarrow 10^4 \leq 5^{n-1} \Leftrightarrow 4 \ln 10 \leq (n-1) \ln 5 \Leftrightarrow n \geq \frac{4 \ln 10}{\ln 5} + 1$ or $\frac{4 \ln 10}{\ln 5} + 1 \approx 6{,}7$ donc $n \geq 7$

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

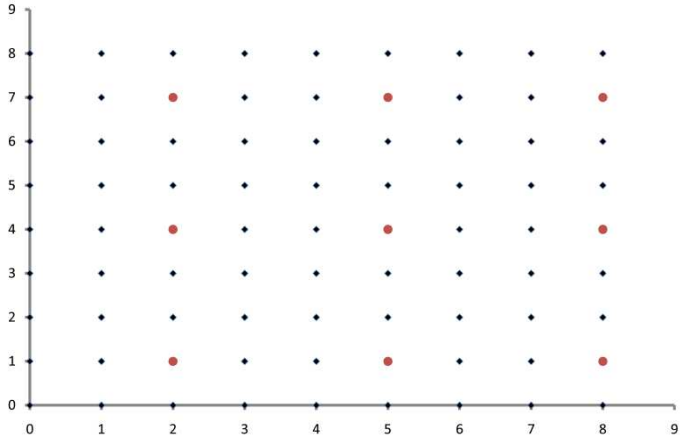
A - Représentation graphique de quelques ensembles

1. Il faut examiner toutes les possibilités :

$0 \leq x \leq 8$ et $x \equiv 2$ (modulo 3) $\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 5$ ou $x = 8$

$0 \leq y \leq 8$ et $y \equiv 1$ (modulo 3) $\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = 4$ ou $y = 7$

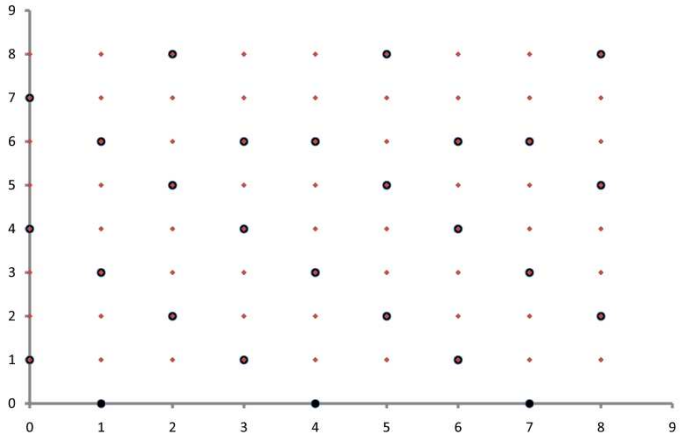
On obtient donc les points de coordonnées (2 ; 1) (2 ; 4) (2 ; 8) (5 ; 1) (5 ; 4) (5 ; 8) (8 ; 1) (8 ; 4) (8 ; 8)



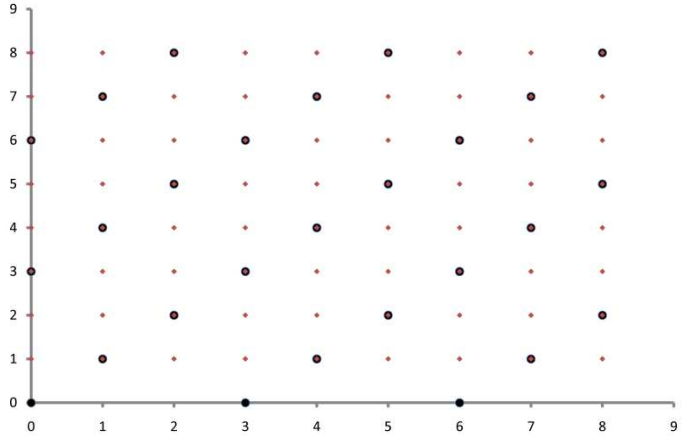
2. $x + y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 2

En mettant à l'intérieur du tableau la somme $x + y$

y \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16



3. $x \equiv y$ (modulo 3), sur le graphique 3



B - Résolution d'une équation

1. $7 \times 3 = 21$ et $4 \times 5 = 20$ donc (3 ; 5) est solution de l'équation (E).

2. $7x - 4y = 1$ et $7 \times 3 - 4 \times 5 = 1$ donc par soustraction membre à membre : $7(x - 3) - 4(y - 5) = 0$

$7(x - 3) = 4(y - 5)$ donc 7 divise $4(y - 5)$ or 4 et 7 sont premiers entre eux donc 7 divise $y - 5$

Il existe un entier relatif k tel que $y - 5 = 7k$

donc en remplaçant dans $7(x - 3) = 4(y - 5)$, on obtient que $x - 3 = 4k$ donc $x = 4k + 3$ et $y = 7k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Vérification : si $x = 4k + 3$ et $y = 7k + 5$ alors $7x - 4y = 28k + 21 - 28k - 20 = 1$

donc l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(4k + 3 ; 7k + 5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3. Si $M \in R_{4,7}$ alors $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq 7$ avec $x = 4k + 3$ et $y = 7k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$

donc $0 \leq 4k + 3 \leq 4$ et $0 \leq 7k + 5 \leq 7$ soit $\frac{-3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$ et $\frac{-5}{7} \leq k \leq \frac{2}{7}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $k = 0$

l'équation (E) admet une unique solution (3 ; 5) pour laquelle le point $M(x ; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

1. M $\in$ [OA] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM} = k\,\overrightarrow{OA}$ avec $0 \leq k \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\,a \\ y = k\,b \\ 0 \leq k \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\,x = a\,y \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$

2. Soit M un point du réseau appartenant à [OA], alors $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} b\,x = a\,y \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$

$b\,x = a\,y$ donc b divise $a\,y$, or a et b sont premiers entre eux donc b divise y (théorème de Gauss)

donc $0 \leq y \leq b$ donc $y = 0$ ou $y = b$. En remplaçant dans $b\,x = a\,y$ alors soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a,\,b}$.

3. Si a et b ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD d est différent de 1 donc $d \geq 2$

Soit a' et b' deux nombres premiers entre eux tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.

Soit M un point du réseau appartenant à [OA], alors $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} b\,x = a\,y \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$ soit $\begin{cases} b'\,x = a'\,y \\ 0 \leq x \leq d\,a' \\ 0 \leq y \leq d\,b' \end{cases}$

$\begin{cases} x = a' \\ y = b' \end{cases}$ vérifie les conditions donc le segment [OA] contient au moins le point A'(a' ; b') du réseau qui est distinct de O et A.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

A – Quelques propriétés

1. $|z'| = \left|-\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{|-1|}{|\bar{z}|}$ or $|-1| = 1$ et $|\bar{z}| = |z|$ donc $|z'| = \frac{1}{|z|}$.

arg (z') = arg(– 1) – arg($\bar{z}$) à 2 π près or arg($\bar{z}$) = – arg(z) à 2 π près donc arg(z') = π + arg(z) à 2 π près

2. $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$ donc $z' = -\frac{1}{\bar{z}\,z} \times z$ donc $z' = -\frac{1}{|z|^2} \times z$

$-\frac{1}{|z|^2}$ est un réel négatif donc $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$

Les points O, M et M′ sont alignés et O $\in$ [MM'].

3. $z' + 1 = -\frac{1}{\bar{z}} + 1$ donc $\overline{z'+1} = 1 - \frac{1}{z}$ soit : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

B – Construction de l'image d'un point

1. C l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z - 1| = 1$ donc tels que AM = 1 donc C est le cercle de centre A de rayon 1.

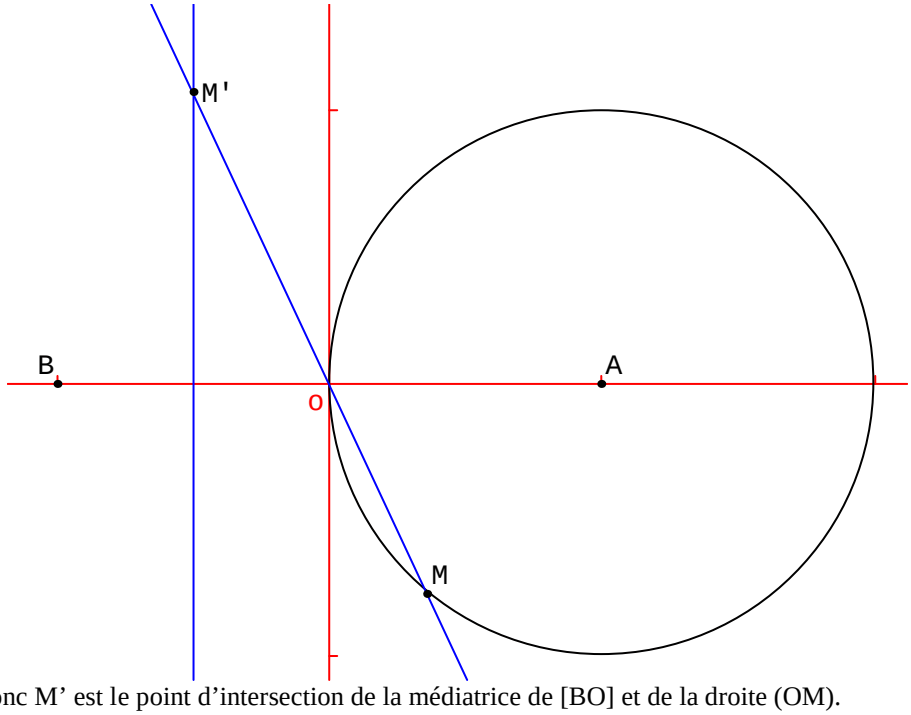
2. *a*. M est un point de C d'affixe z, distinct du point O donc $z \neq 0$ et $|z - 1| = 1$

$\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$ donc $|z' + 1| = |\overline{z'+1}|$

$|z' + 1| = \frac{1}{|z|}|z - 1|$ donc $|z' + 1| = \frac{1}{|z|}$

or $|z'| = \frac{1}{|z|}$ donc $|z' + 1| = |z'|$.

$|z' + 1| = |z'|$ donc BM' = OM' donc M' décrit la médiatrice de [AO].



b. si z' vérifie l'égalité : $|z' + 1| = |z'|$, comme $|z' + 1| = \frac{1}{|z|}|z - 1|$ et $|z'| = \frac{1}{|z|}$

alors $\frac{1}{|z|}|z - 1| = \frac{1}{|z|}$

$\frac{1}{|z|} \neq 0$ donc z vérifie l'égalité : $|z - 1| = 1$.

3. Si M est un point de C , alors M' décrit la médiatrice de [BO] et O, M, M' sont alignés donc M' est le point d'intersection de la médiatrice de [BO] et de la droite (OM).

EXERCICE 4 7 points Commun à tous les candidats

A – Restitution organisée de connaissances

$x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^{x}}{x}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$.

B – Étude d'une fonction

1. f est le produit de fonctions définies continues dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est définie continue dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f = u\,v$ avec : $\begin{cases} u(x) = x+1 \text{ donc } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} \text{ donc } v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $f'(x) = e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = -x\,e^{-x}$

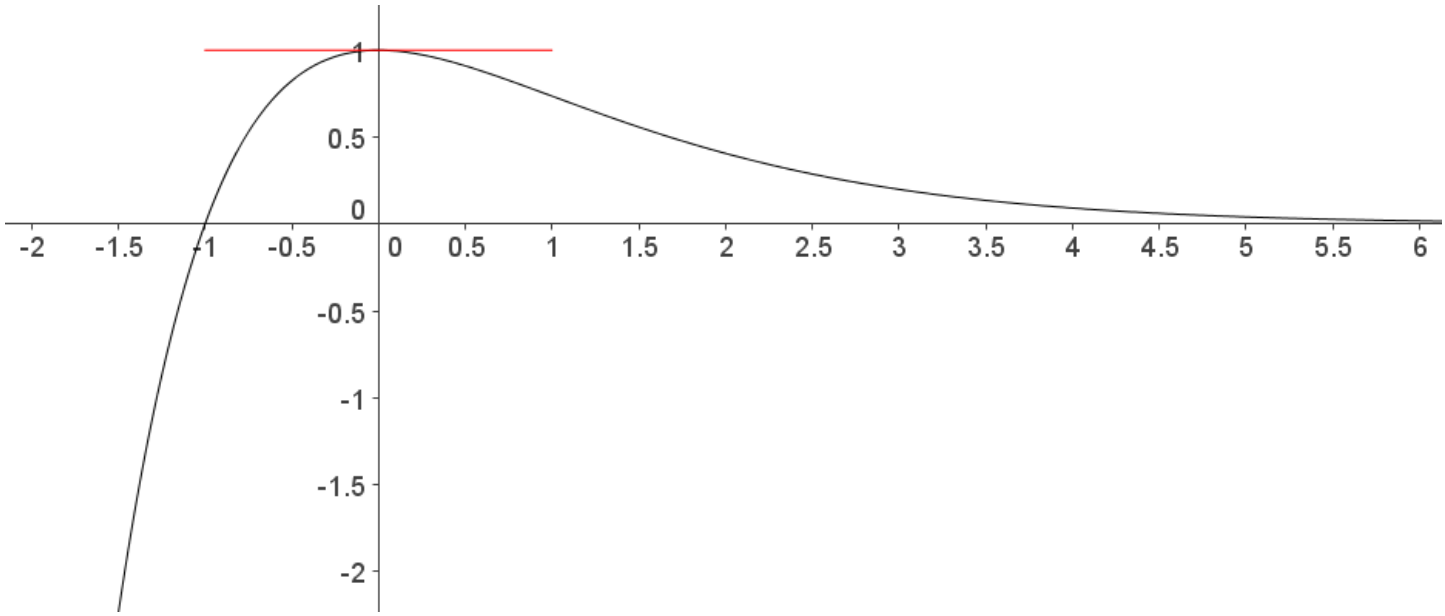
La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ comme $f(x) = x\,e^{-x} + e^{-x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

2.



C – Étude d'une famille de fonctions

1. *a.* f_0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x + 1$ donc f_0 est une fonction affine.

b. les ordonnées points d'intersection des courbes C_0 et C_1 sont telles que $f_0(x) = f_1(x)$ donc $x + 1 = (x+1)\,e^{x}$
soit $(x+1)(e^{x} - 1) = 0$ donc $x = -1$ ou $x = 0$. Les points d'intersection des courbes C_0 et C_1 ont pour coordonnées $(-1\,;0)$ et $(0\,;1)$.
$f_k(-1) = 0$ et $f_k(0) = 1$ donc pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe C_k.

2. $f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)\,e^{(k+1)x} - (x+1)\,e^{kx} = (x+1)\,e^{kx+x} - (x+1)\,e^{kx} = (x+1)\,e^{kx}(e^{x} - 1)$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ a le même signe que $(x+1)(e^{x} - 1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$	$-$		0	$+$			$+$
$e^{-x} - 1$	$-$			$-$	0		$+$
$(x+1)(e^{x} - 1)$	$+$		0	$-$	0		$+$
positions relatives des courbes C_k et C_{k+1}.	C_{k+1} est au dessus de C_k		point d'intersection	C_{k+1} est en dessous de C_k	point d'intersection		C_{k+1} est au dessus de C_k

3. $f_k = u\,v$ avec : $\begin{cases} u(x) = x+1 & \text{donc } u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{k\,x} & \text{donc } v'(x) = k\,\mathrm{e}^{k\,x} \end{cases}$ donc $f_k'(x) = \mathrm{e}^{k\,x} + (x+1)\,(k\,\mathrm{e}^{k\,x}) = (k\,x + k + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc f_k' a le même signe que $k\,x + k + 1$

si $k < 0$ alors $\mathrm{M}_k = f_k\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \dfrac{1}{k}\,\mathrm{e}^{k+1}$

x	$-\infty$		$\dfrac{k+1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k	$-\infty$	↗	M_k	↘	0

si $k > 0$ alors $m_k = f_k\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \dfrac{1}{k}\,\mathrm{e}^{k+1}$

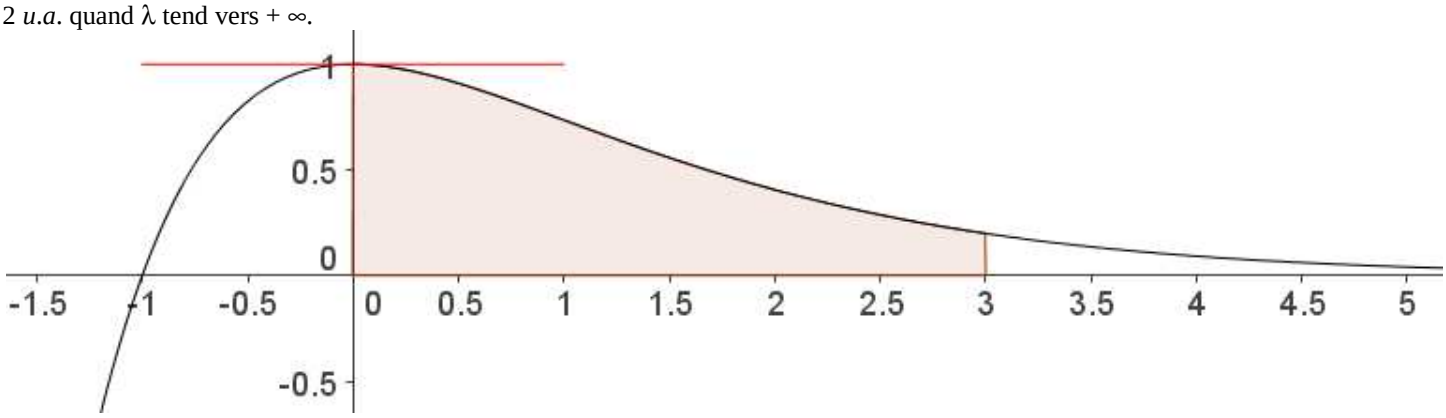
x	$-\infty$		$\dfrac{k+1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k	0	↘	m_k	↗	$+\infty$

4. Sur] 0 ; + ∞ [, d'après la position relative des courbes C_k et C_{k+1}, C_2 est au dessus de C_1, qui est au dessus de C_0, qui est au dessus de C_{-1} qui est au dessus de C_{-2}, qui est au dessus de C_{-3} donc $\mathfrak{F}$ correspond à $k = -3$; $\mathfrak{E}$ à $k = -1$; $\mathfrak{K}$ à $k = 1$ et $\mathfrak{K}$ à $k = 2$.

D – Calcul d'une aire plane

1. Soit $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ alors } u(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = x+1 \text{ alors } v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\mathrm{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{A}(\lambda) = -(\lambda+1)\,\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\lambda = -(\lambda+1)\,\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 - (\mathrm{e}^{-\lambda} - 1) = 2 - (\lambda+2)\,\mathrm{e}^{-\lambda}$

2. λ un réel strictement positif donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathrm{e}^{-l} = 0$ donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (\lambda+2)\,\mathrm{e}^{-\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathrm{A}(\lambda) = 2$.

L'aire (en rose sur le graphique) limitée par la courbe de f, les droites d'équation $x = 0$, $x = \lambda$ ($\lambda > 0$) et l'axe des abscisses tend vers 2 *u.a.* quand λ tend vers + ∞.