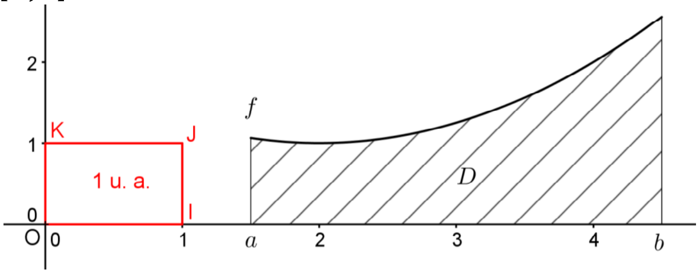
1. Aire et intégrale d'une fonction continue et positive sur [a ; b]

Définition

L'intégrale de a à b d'une fonction f **continue et positive** sur [a ; b] est la mesure de l'« aire sous la courbe » en unités d'aire.

$$\text{aire}(\mathbf{D}) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



On appelle unité d'aire (notée en abrégé u. a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire(rectangle OIKJ) = 1 u. a.

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur [a ; b], la fonction définie sur [a ; b] par $x \rightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur [a ; b] et sa dérivée est la fonction f.

2. Primitives

Définition : La fonction F est une primitive de la fonction f, continue sur I, si et seulement si f est la fonction dérivée de F sur I.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Propriété : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel.
Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

On détermine les primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.

f, u et v désignent des fonctions dérivables sur un intervalle I, k est une constante réelle

f	F
k	$k\,x$
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	ln x
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ ou $-\frac{1}{n-1}x^{-n+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\tan^2 x + 1$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
e^x	e^x
x^α ($\alpha > 0$, α réel)	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$

f	F
u'	u
$u'\,u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'\sin u$	$u'\cos u$
$u'\cos u$	$-u'\sin u$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$ ou $-n\frac{1}{n-1}u^{-n-1}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'(1+\tan^2 u)$ ou $\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$u'\,u^\alpha$ ($\alpha > 0$, α réel)	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

Opérations

f	f'
$k\,u$	$k\,U$
$u + v$	$U + V$

où U et V sont respectivement des primitives de u et v.

3. Primitives et intégrales d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction définie continue sur intervalle $[a\ ;\ b]$, et F une de ses primitives, on appelle intégrale de a à b de la fonction f, le nombre réel $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, la fonction définie sur $[a\ ;\ b]$ par $x \rightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f s'annulant en a.

Dans les propriétés suivantes, les fonctions sont continues sur un intervalle I, les nombres réels a, b et c sont dans I, les nombres λ et $\mu\mu$ sont deux réels quelconques.

Propriétés

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$
- $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$ (Relation de Chasles)
- si λ et μ sont deux réels : $\int_a^b \left(\lambda\, f(t) + \mu\, g(t)\right) dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$
- Si $a \leq b$ et si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $f\ (x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ (positivité)
- Si $a \leq b$ et si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $f\ (x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$ (comparaison)

Valeur moyenne

On appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$, le réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

Théorème de la moyenne

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $m \leq f\ (x) \leq M$ alors $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M\,(b-a)$

ou encore $m \leq \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$

4. Application Aire entre deux courbes

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, telles que, pour tout t de $[a\ ;\ b]$, $f(t) \leq g(t)$.
L'aire du domaine **D** limité par la courbe représentative de f, celle de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, mesure $\int_a^b \left(g(t) - f(t)\right) dt$ en unités d'aire.