

EXERCICE 1 Commun à tous les candidats 6 points

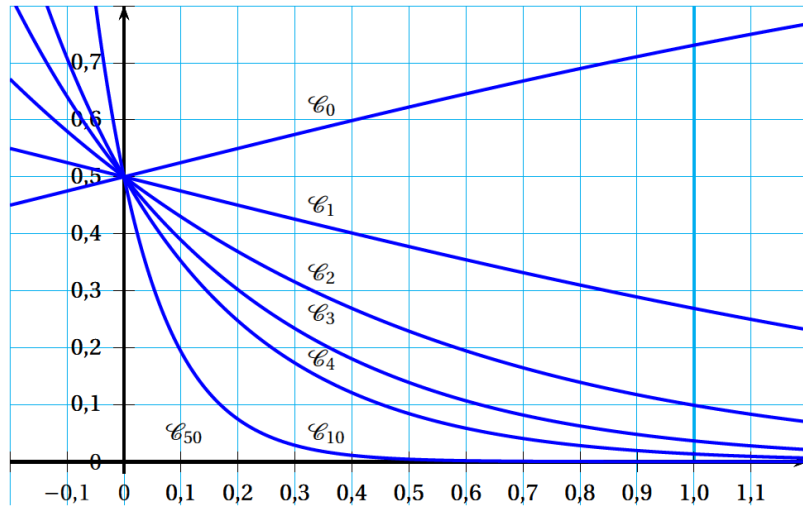
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-(n-1)x}}{1 + e^x}.$$

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On a représenté ci-dessous les courbes C_n pour différentes valeurs de n .



Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n .
2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude 0,05.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_1 .
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel x , $d_n(x) = e^{-nx} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.
 - b. Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0; 1]$.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
 - a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
 - b. En déduire la valeur de ℓ .
 - c. On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné. Recopier et compléter les quatre lignes de la partie Traitement de l'algorithme suivant :

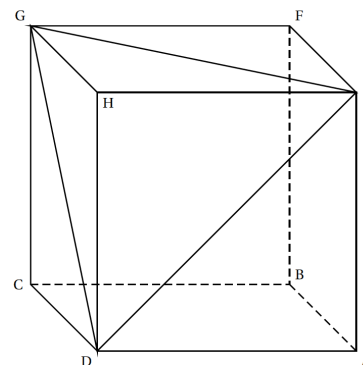
Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K Affecter $1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ à U
Traitement :	Demander à l'utilisateur la valeur de N Tant que $K < N$ Affecter à U Affecter à K Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 5 points

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.

On se place dans le repère orthonormé $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
- Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).
- Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
- On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
Dédire des questions précédentes les coordonnées du point P.
- Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.



EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 4 points

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

- On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z
(E) : $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$,

où a désigne un nombre réel quelconque.

- Pour toute valeur de a , (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
 - Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
 - Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
 - Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.
- Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0; \pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$.
Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0; \pi[$:
 - Le nombre z est un réel positif.
 - Le nombre z est égal à 1.
 - Un argument de z est θ .
 - Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$.
 - Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par $f(x) = e^{-x} \sin x$.
 - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{4}; +\infty \right[$
 - Soit f' la fonction dérivée de f . On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
 - La fonction f est positive sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{4}; +\infty \right[$
 - Soit F la fonction définie, pour tout réel x , par $F(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x)$.
La fonction F est une primitive de la fonction f .
 - Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,02.
0,45 est une valeur approchée à 10^{-2} près de :
 - $P(X = 30)$
 - $P(X \leq 60)$
 - $P(X \leq 30)$
 - $P(30 \leq X \leq 40)$

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité.

Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.

Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.
2. Déterminer a_1 et b_1 .
3. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = A X_n$.
 - b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.
 - c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30} . En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = D X_n + B$.
 2. On pose, pour tout entier naturel n , $Y_n = X_n - 10 B$.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , $Y_{n+1} = D Y_n$.
 - b. On admet que pour tout entier naturel n , $Y_n = D^n Y_0$.
- En déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = D^n (X_0 - 10 B) + 10 B$.
- c. Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n .
 3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?

CORRECTION

EXERCICE 1 Commun à tous les candidats 6 points

Partie A - Étude graphique

1. La fonction exponentielle est continue, strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f_n continue, strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc u_n est l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C_n les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. Graphiquement, C_{n+1} est en dessous de C_n donc la suite (u_n) est décroissante
Elle semble converger vers 0.

3. u_4 est l'aire d'un domaine qui est comprise entre la somme S des aires de rectangles « trop grands » (en rose sur le graphique) et la somme s des aires de rectangles « trop petits » (hachurés sur le graphique).

$$S = 0,1 f(0) + 0,1 f(0,1) + 0,1 f(0,2) + \dots + 0,1 f(0,9) = 0,1 [f(0) + f(0,1) + \dots + f(0,9)]$$

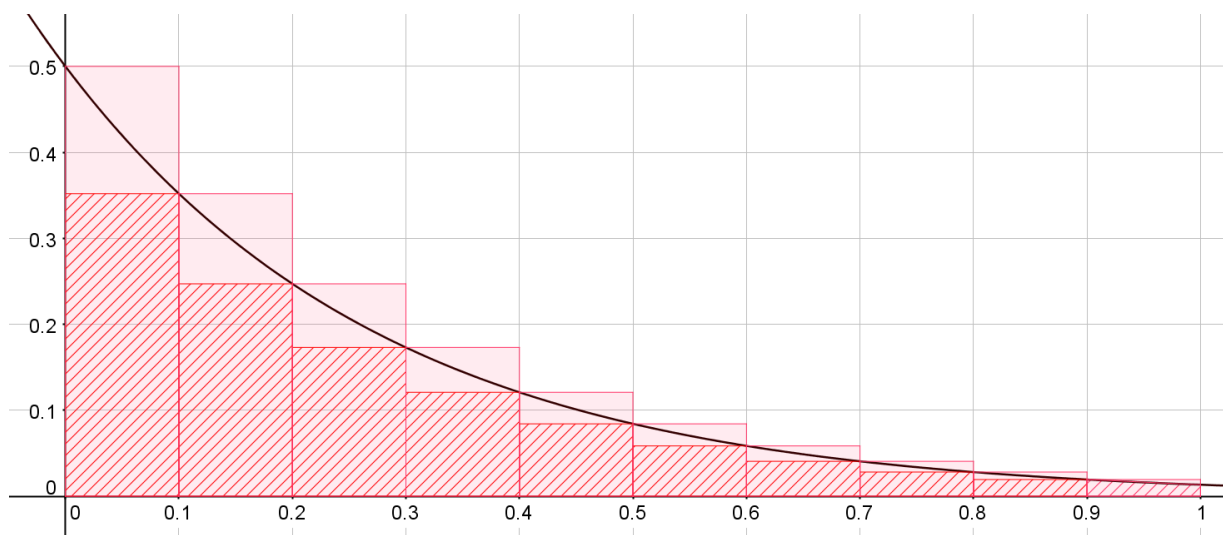
$$s = 0,1 f(0,1) + 0,1 f(0,2) + \dots + 0,1 f(0,9) + 0,1 f(1) = 0,1 [f(0,1) + \dots + f(0,9) + f(1)]$$

$$f(0,1) + \dots + f(0,9) = 1,12385$$

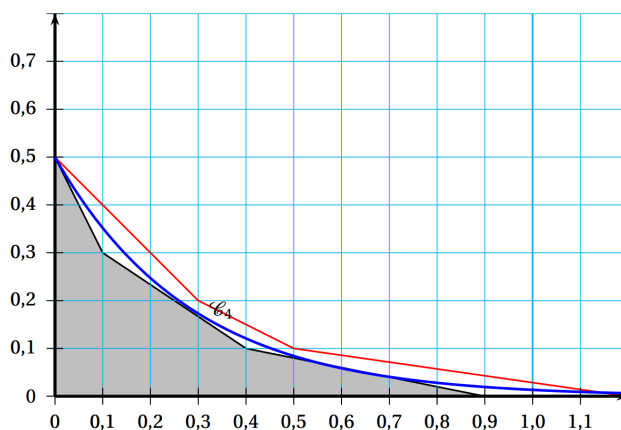
$$\text{donc } S = 0,1 (0,5 + 1,123848665) = 0,162384866$$

$$s = 0,1 [1,12385 + 0,013389805] = 0,113723847 \text{ donc } 0,113 < 0,113723847 \leq u_4 \leq 0,162384866 < 0,163$$

$$0,163 - 0,113 = 0,05 \text{ donc on a bien un encadrement de } u_4 \text{ égal à } 0,05$$



On aurait pu aussi utiliser une décomposition en utilisant des trapèzes



Partie B - Étude théorique

1. $u_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1$ donc $u_0 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

2. $u_0 + u_1 = \int_0^1 f_0(x) dx + \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{1+e^x} dx$

$u_0 + u_1 = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1$ donc $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout entier naturel n , et pour tout x de $[0; 1]$, $f_n(x) > 0$ donc $\int_0^1 f_n(x) dx \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.

4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

a. $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^x} - \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} = \frac{e^{-nx} - e^{-(n-1)x}}{1+e^x} = \frac{e^{-nx} - e^{-nx+x}}{1+e^x} = \frac{e^{-nx}(1-e^x)}{1+e^x}$

b. si $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq e^x \leq e$ donc $1 - e^x \leq 0$ et $1 + e^x > 0$ donc, sur l'intervalle $[0; 1]$, $d_n(x) \leq 0$

5. Sur l'intervalle $[0; 1]$, $d_n(x) \leq 0$, donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ donc $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$

soit $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente.

6. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$f_{n+1}(x) + f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^x} + \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} = \frac{e^{-nx} + e^{-(n-1)x}}{1+e^x} = \frac{e^{-nx} + e^{-nx+x}}{1+e^x} = \frac{e^{-nx}(1+e^x)}{1+e^x} = e^{-nx}$

$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x) dx + \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (f_{n+1}(x) + f_n(x)) dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + u_{n+1}) = 2\ell = 0$ donc $\ell = 0$

c. Puisque $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$ alors $u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n} - u_n$ donc :

Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter $\frac{1 - e^{-K}}{K} - U$ à U
	Affecter $K + 1$ à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 5 points

Dans le repère orthonormé $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$:

B a pour coordonnées $(0; 0; 0)$, H $(1; 1; 1)$, D $(1; 1; 0)$; E $(1; 0; 1)$ G $(0; 1; 1)$.

1. La droite (BH) est l'ensemble des points M $(x; y; z)$ tels qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{BM} = t \overrightarrow{BH}$.

Une représentation paramétrique de la droite (BH) est donc
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

2. $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $(0; -1; 1)$ et $\overrightarrow{DG}$ $(-1; 0; 1)$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BH} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$$

$$\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{BH} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$$

(BH) est orthogonale à deux droites sécantes (DE) et (DG) du plan (DEG) donc la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. (BH) est perpendiculaire au plan (DEG) donc $\overrightarrow{BH}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (DEG) donc (DEG) a une équation de la forme $1x + 1y + 1z + d = 0$

D appartient au plan (DEG) donc $1 + 1 + 0 + d = 0$ soit $d = -2$

Une équation cartésienne du plan (DEG) est $x + y + z - 2 = 0$

4. P appartient à la droite (BH) donc il existe un réel t tel que P $(t; t; t)$

P $\in$ (DEG) donc $t + t + t - 2 = 0$ soit $3t - 2 = 0$ donc $t = \frac{2}{3}$.

P a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

5. $PD^2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$

$$PE^2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$$PG^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

P appartient au plan (DEG) et $PD = PE = PG$ donc P est le centre du cercle circonscrit du triangle DEG.

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 4 points

1. $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + 1) = -4$ donc $\Delta = (2i)^2$

(E) admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-2a + 2i}{2} = -a + i$ et $z_2 = -a - i$

z_1 et z_2 sont conjuguées donc leurs modules sont égaux donc :

- Pour toute valeur de a , (E) n'a pas de solution dans C. **FAUX**
- Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans C ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts. **FAUX**
- Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans C ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux. **VRAI**
- Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle. **FAUX**

2. $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$, $\theta \in]0; \pi[$ donc $\sin \theta \neq 0$, z n'est pas un nombre réel.

- Le nombre z est un réel positif. **FAUX**
- Le nombre z est égal à 1. **FAUX** :
 $|e^{i\theta}| = 1$ donc $e^{i\theta} \neq 0$ donc $z \neq 1$.

- Un argument de z est θ . **FAUX** si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = 1 + i$ donc $\arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

- Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$. **VRAI**

$$z = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}, \theta \in]0; \pi[\text{ donc } \cos \frac{\theta}{2} \geq 0 \text{ donc } \arg z = \frac{\theta}{2} \text{ à } 2 \text{ près}$$

3. $f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x} (\cos x - \sin x)$

- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{4}; +\infty \right[$. **FAUX**

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}} \text{ et } \frac{3\pi}{2} > \frac{\pi}{4} \text{ donc } f'(x) \text{ n'est pas négative sur } \left] \frac{\pi}{4}; +\infty \right[.$$

- Soit f' la fonction dérivée de f . On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ **VRAI**

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} \text{ donc } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

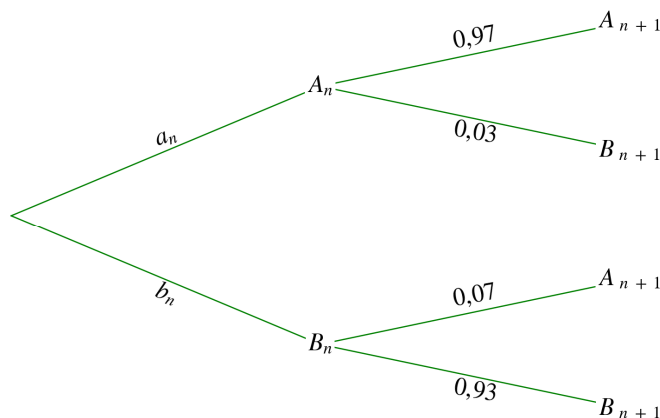
- La fonction f est positive sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{4}; +\infty \right[$ **FAUX**

La fonction sinus est négative sur $]\pi; 2\pi]$ donc f est négative sur $]\pi; 2\pi]$

- Soit F la fonction définie, pour tout réel x , par $F(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x)$.
 La fonction F est une primitive de la fonction f . **FAUX**
 $F'(x) = -e^{-x} (\cos x - \sin x) + e^{-x} (-\sin x - \cos x) = -2 \sin x e^{-x}$
 $F'(x) \neq f(x)$ donc F n'est pas une primitive de la fonction f .

4. $P(X \leq t) = 1 - e^{-0,02t}$ et $P(c \leq X \leq d) = P(X \leq d) - P(X \leq c) = e^{-0,02c} - e^{-0,02d}$
 0,45 est une valeur approchée à 10^{-2} près de :

- $P(X = 30) = 0$ **FAUX**
- $P(X \leq 60) = 0,6988$ **FAUX**
- $P(X \leq 30) = 0,4512$ **VRAI**
- $P(30 \leq X \leq 40) = 0,0995$ **FAUX**

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
5 points
Partie A
1.


2. $a_1 = 0,97 a_0 + 0,07 b_0 = 0,97 \times 0,4 + 0,07 \times 0,6 = 0,43$
 $b_1 = 1 - a_1 = 0,57$

3. $a_{n+1} = 0,97 a_n + 0,07 b_n$ et $b_{n+1} = 0,03 a_n + 0,93 b_n$.

4. a. $A X_n = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 a_n + 0,07 b_n \\ 0,03 a_n + 0,93 b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$ donc pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = A X_n$.

b. Initialisation : $A \neq O$ donc $A^0 = I$ (matrice identité) donc $X_0 = A^0 X_0$. La propriété est initialisée.

Hérédité : montrons pour tout entier n que si $X_n = A^n X_0$, alors $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

$X_{n+1} = A X_n$ or $X_n = A^n X_0$, donc $X_{n+1} = A \times A^n X_0$ soit $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

La propriété est héréditaire

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

c. $X_{30} = \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,313 \end{pmatrix}$ donc au bout de 30 jours, 68,7 % des ordinateurs sont sains et 31,3 % sont défectueux.

Partie B

1. a. Un ordinateur ne peut qu'être sain (au bout de $n+1$ jours, probabilité a_{n+1}) ou défectueux (au bout de $n+1$ jours, probabilité b_{n+1}) donc, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

b. $D X_n + B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 a_n + 0,07 \\ 0,9 b_n + 0,03 \end{pmatrix}$

or $\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ a_{n+1} = 0,97 a_n + 0,07 b_n \\ b_{n+1} = 0,03 a_n + 0,93 b_n \end{cases}$ donc $\begin{cases} a_{n+1} = 0,97 a_n + 0,07 (1 - a_n) \\ b_{n+1} = 0,03 (1 - b_n) + 0,93 b_n \end{cases}$ donc $\begin{cases} a_{n+1} = 0,97 a_n - 0,07 a_n + 0,07 \\ b_{n+1} = -0,03 b_n + 0,93 b_n + 0,03 \end{cases}$ soit

$\begin{cases} a_{n+1} = 0,9 a_n + 0,07 \\ b_{n+1} = 0,9 b_n + 0,03 \end{cases}$ donc $D X_n + B = \begin{pmatrix} 0,9 a_n + 0,07 \\ 0,9 b_n + 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ donc, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = D X_n + B$

2. a. $Y_n = X_n - 10 B$ donc $X_n = Y_n + 10 B$ donc en remplaçant dans $X_{n+1} = D X_n + B$
 $Y_{n+1} + 10 B = D (Y_n + 10 B) + B$

$Y_{n+1} = D Y_n + 10 D B + B - 10 B$ or $D B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,07 \times 0,9 \\ 0,03 \times 0,9 \end{pmatrix} = 0,9 B$

$Y_{n+1} = D Y_n + 10 \times 0,9 B - 9 B$ donc $Y_{n+1} = D Y_n$

b. $X_n = Y_n + 10 B$ et $Y_n = D^n Y_0$ donc $X_n = D^n Y_0 + 10 B$

$Y_n = X_n - 10 B$ donc $Y_0 = X_0 - 10 B$ donc pour tout entier naturel n , $X_n = D^n (X_0 - 10 B) + 10 B$.

c. D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix}$, $10 B = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

$$X_n = D^n (X_0 - 10 B) + 10 B, X_0 - 10 B = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } D^n (X_0 - 10 B) + 10 B = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{pmatrix}$$

$$a_{n+1} = -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \text{ et } b_{n+1} = 0,3 \times 0,9^n + 0,3.$$

3. $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,7$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0,3$.

A long terme, 70 % des ordinateurs seront sains et 30 % défectueux.