D'après France Métropolitaine Septembre – 98

1 : On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

a **:** Montrer que l'équation (E) : "$P(z) = 0$ " admet une solution dans $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels.

b **:** Donner alors une factorisation de $P(z)$ puis résoudre l'équation (E) dans **C**, ensemble des nombres complexes.

On appelle a la solution entière de (E), b la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et c la solution de (E) dont la partie imaginaire est négative.

c **:** Que peut-on dire de b et c?

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, un point M est défini par son affixe z. On note alors $M(z)$.

2 : Soient les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$.

a **:** Calculer les distance AB , AC et BC. Que peut-on en déduire concernant le triangle ABC?

b **:** Montrer qu'il existe une rotation r_1 de centre A telle que $r_1(B) = C$. Donner l'angle α de cette rotation.

c **:** Soit I le milieu du segment [AB]. Quelle est l'image J de I par r_1 ? Que peut-on dire des droites (BC) et (I J)?

3 : On définit les deux rotations r_2 et r_3 de centre respectifs B et C et d'angle α.

a **:** Déterminer l'image de B par $(r_3 \circ r_2 \circ r_1)$, composée des trois rotations.

b **:** Que peut-on dire de $(r_3 \circ r_2 \circ r_1)$?