Centres étrangers juin 2016

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

b. Quelle est la meilleure valeur approchée de $P(X \geq 400)$ parmi les nombres suivants ?

0,92 0,93 0,94 0,95

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal 400 ?

Partie B - Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50). Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C - Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

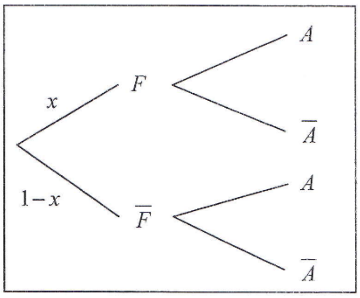
L'institut de sondage sait par ailleurs que, la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère ;
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'événement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'événement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'événement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'événement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».



Ainsi, d'après les données, on a $P(\text{A}) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2. On pose $x = P(F)$.

a. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b. En déduire une égalité vérifiée par le réel x.

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

CORRECTION

Partie A - Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1. *a.* On a une succession de 700 expériences aléatoires indépendantes, chacune d'elle a deux issues :

- réussite : la personne accepte de répondre à la question posée ($p = 0,6$)
- échec : la personne refuse de répondre à la question posée ($q = 1 - p = 0,4$)

donc la variable aléatoire X égale au nombre de personnes acceptant de répondre à la question posée, suit une loi binomiale de paramètres (700 ; 0,6)

b. $P(X \leq 399) = 0,057$ donc $P(X \geq 400) = 1 - 0,057$ soit approximativement 0,94

2. Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de personnes acceptant de répondre à la question posée. On cherche donc n tel que $P(X_n \geq 400) > 0,9$.

X_n suit une loi binomiale de paramètres (n ; 0,6).

La suite ($P(X_n \geq 400)$) est une suite croissante (plus on interroge de personnes plus la probabilité qu'au moins 400 personnes répondent augmente)

En utilisant la calculatrice : si $n = 693$ alors $P(X_n \geq 400) \approx 0,897$ et si $n = 694$, alors $P(X_n \geq 694) \approx 0,905$ donc $n = 694$ donc $n = 694$

L'institut doit interroger au minimum 694 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal 400.

Partie B - Proportion de personnes favorables au projet dans la population

1. $n \geq 50$, $n\,p = n \times 0{,}29$ donc $n\,p \geq 50 \times 0{,}29 \geq 5$ et $n\,(1-p) = n \times 0{,}71$ donc $n\,(1-p) \geq 50 \times 0{,}71 \geq 5$
Les conditions sont vérifiées pour pouvoir utiliser un intervalle de confiance.

$$I_n = \left[0{,}29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,0{,}29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

2. L'amplitude de I_n est égale à $0{,}29 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(0{,}29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$

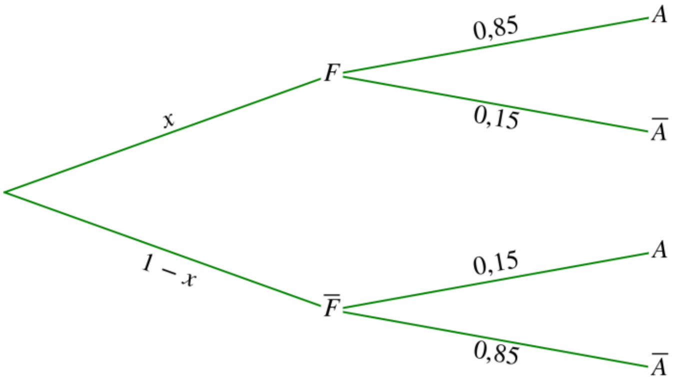
On doit avoir $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}04$ donc $\sqrt{n} \geq \frac{2}{0{,}04}$ soit $n \geq 50^2$ donc $n \geq 2500$

La valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04 est 2500.

Partie C - Correction due à l'insincérité de certaines réponses

1. L'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée donc :
Si la personne est en réalité favorable au projet, elle affirmera qu'elle ne l'est pas dans 15 % des cas donc $P_F(\overline{A}) = 0{,}15$ donc $P_F(A) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$
Si la personne, en réalité, n'est pas favorable au projet, elle affirmera qu'elle l'es dans 15 % des cas donc $P_{\overline{F}}(A) = 0{,}15$

2. *a*.



***b*.** $P(A) = 0{,}29$ soit $P(A \cap F) + P(A \cap \overline{F}) = 0{,}29$ donc $0{,}85\,x + 0{,}15\,(1-x) = 0{,}29$ soit $0{,}7\,x = 0{,}29 - 0{,}15$ donc $0{,}7\,x = 0{,}14$

3. $0{,}7\,x = 0{,}14$ donc $x = \frac{0{,}14}{0{,}7} = 0{,}2$.

20 % des personnes sont réellement favorables au projet.