On considère l'équation (E) : $17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.

a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x = 6y$

b. Montrer que le couple $(-1 ; -3)$ est une solution particulière de l'équation $17x - 6y = 1$.
En déduire un couple solution particulière de l'équation (E).

c. En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation (E)

d. Montrer que le PGCD des couples solutions de (E) est 1 ou 2

e. Déterminer les couples $(x ; y)$ de $\mathbb{Z}^2$ solutions de (E) dont le PGCD est 2

f . Déterminer le couple $(x_0 ; y_0)$ solution de (E) tel que $\text{PGCD}(x_0 ; y_0) = 2$ et $100 \leq y_0 \leq 150$.

CORRECTION

a. x et y sont des entiers relatifs tels que $17x = 6y$ donc 17 divise $6y$ or 6 et 17 sont premiers entre eux donc 17 divise y (théorème de Gauss). Il existe donc un entier relatif k tel que $y = 17k$.
En remplaçant dans $17x = 6y$ alors $17x = 6 \times 17k$ donc $x = 6k$.
<u>Réciproquement :</u>
Si $x = 6k$ et $y = 17k$ alors $17x = 17 \times 6k = 6y$ donc le couple $(6k ; 17k)$ $k \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation $17x = 6y$.

Tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation $17x = 6y$ sont de la forme $(6k ; 17k)$ $k \in \mathbb{Z}$.

b. $17 \times (-1) - 6 \times (-3) = -17 + 18 = 1$ donc le couple $(-1 ; -3)$ est une solution particulière de l'équation $17x - 6y = 1$.
En multipliant par 2 : $17 \times (-1) - 6 \times (-3) = 1$ donc $17 \times (-2) - 6 \times (-6) = 2$
$(-2 ; -6)$ est solution particulière de l'équation (E) : $17x - 6y = 2$,

c. $\begin{cases} 17x - 6y = 2 \\ 17 \times (-2) - 6 \times (-6) = 2 \end{cases}$ donc par différence terme à terme : $17(x + 2) - 6(y + 6) = 0$

donc $(x + 2 ; y + 6)$ est solution de l'équation $17x = 6y$.
Il existe donc d'après la question a**.** un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 2 = 6k$ et $y + 6 = 17k$ donc $x = 6k - 2$ et $y = 17k - 6$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d. Soit d le PGCD des couples solutions de (E), d divise x et d divise y donc d divise $17x - 6y$ soit d divise 2
2 est un nombre premier et $d > 0$ donc $d = 1$ ou $d = 2$.

e. $\text{PGCD}(x ; y) = 2 \Leftrightarrow \text{PGCD}(6k - 2 ; 17k - 6) = 2$ donc 2 divise $6k - 2$ (toujours vrai) et 2 divise $17k - 6$
2 divise $17k - 6 \Leftrightarrow 17k - 6 \equiv 0\ [2]$
$17 \equiv 1\ [2]$ et $6 \equiv 0\ [2]$ donc $17k - 6 \equiv k\ [2]$
2 divise $17k - 6 \Leftrightarrow k \equiv 0\ [2] \Leftrightarrow k$ pair. Il existe un entier relative p tel que $k = 2p$.
$\text{PGCD}(x ; y) = 2 \Leftrightarrow x = 12p - 2$ et $y = 34p - 6$ ($p \in \mathbb{Z}$)
<u>Remarque :</u> par conséquence : $\text{PGCD}(x ; y) = 1 \Leftrightarrow k$ impair $\Leftrightarrow x = 12p + 4$ et $y = 34p + 11$ ($p \in \mathbb{Z}$)

f . $\text{PGCD}(x_0 ; y_0) = 2$ et $100 \leq y_0 \leq 150 \Leftrightarrow$ $x = 12p - 2$ et $y = 34p - 6$ ($p \in \mathbb{Z}$) et $100 \leq 34p - 6 \leq 150$

$100 \leq 34p - 6 \leq 150 \Leftrightarrow 106 \leq 34p \leq 156 \Leftrightarrow \dfrac{53}{17} \leq p \leq \dfrac{78}{17}$

$3 < \dfrac{53}{17} < 4$ et $4 < \dfrac{78}{17} < 5$ donc $3 < p < 5$, p est un nombre entier relatif donc $p = 4$
$x = 12p - 2$ et $y = 34p - 6$ donc $\text{PGCD}(x_0 ; y_0) = 2$ et $100 \leq y_0 \leq 150 \Leftrightarrow x = 46$ et $y = 130$