

Sommaire

2012	3
Asie juin 2012.....	3
Centres étrangers Juin 2012.....	5
Liban mai 2012.....	6
Métropole juin 2012.....	7
Nouvelle Calédonie novembre 2012	8
2011	9
Centres étrangers Juin 2011.....	9
La Réunion Juin 2011.....	10
Liban mai 2011	11
2010	12
Antilles-Guyane juin 2010.....	12
Asie juin 2010.....	13
Centres étrangers juin 2010	14
La Réunion septembre 2010	15
La Réunion juin 2010.....	16
Liban juin 2010.....	17
Métropole La Réunion septembre 2010.....	18
Métropole juin 2010.....	19
2009	20
Amérique du Sud novembre 2009.....	20
Antilles-Guyane juin 2009.....	21
Polynésie juin 2009.....	22
Pondichéry avril 2009	23
2008	24
Antilles-Guyane septembre 2008.....	24
Centres étrangers juin 2008	25
La Réunion juin 2008.....	26
Liban juin 2008.....	27
Métropole & La Réunion septembre 2008.....	28
Métropole juin 2008.....	29
Nouvelle-Calédonie novembre 2008	30
Polynésie juin 2008.....	31
Pondichéry avril 2008	32
2007	33
Amérique du Nord juin 2007	33
Amérique du Sud novembre 2007.....	34
Antilles-Guyane septembre 2007	35
Antilles-Guyane juin 2007.....	36
Asie juin 2007.....	37
Centres étrangers juin 2007	38
La Réunion juin 2007.....	39
Liban juin 2007.....	40
Métropole juin 2007.....	41
Polynésie septembre 2007	42
Pondichéry avril 2007	44
2006	45
Antilles-Guyane juin 2006.....	45
Amérique du Nord juin 2006.....	46
Antilles-Guyane septembre 2006	47
La Réunion juin 2006.....	48
Nouvelle-Calédonie novembre 2006	49
Pondichéry avril 2006	50
2005	51
France septembre 2005.....	51
Nouvelle-Calédonie novembre 2005.....	52
Amérique du Nord Juin 2004.....	53
Liban juin 2004.....	54
Amérique du Nord Juin 2003.....	55
Amérique du Sud Novembre 2003.....	56
Pondichéry avril 2003	57
Asie Juin 2001	58
France métropolitaine juin 2000	59

Amérique du Sud Novembre 1998.....	60
------------------------------------	----

Amérique du sud novembre 2012

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que $AB = L$ et $AD = 1$ ($L > 1$).

Sur les segments $[AB]$ et $[CD]$, on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.

On suppose qu'il existe une similitude directe f de rapport k telle que :

$$f(A) = B, f(B) = C, f(C) = E.$$

Partie A

1. En utilisant des rapports de longueurs, montrer que $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

2. **a.** Déterminer l'angle et le rapport de la similitude f .

On appelle Ω le centre de la similitude f .

b. Déterminer l'image par la composée $f \circ f$ des points Ω , A et B.

c. Quelle est la nature de la transformation $f \circ f$? Préciser ses éléments caractéristiques.

d. En déduire que Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

3. **a.** Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude f .

b. En déduire une construction du point E' , image du point E par la similitude f .

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$.

On appelle z l'affixe du point M, et z' l'affixe du point M', image du point M par f .

1. Montrer que $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} i z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. Déterminer l'image du point D par f .

Asie juin 2012

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Détermination d'une similitude directe

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_B = -\sqrt{3} + i.$$

1. **a.** Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
- b.** Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.
2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f de centre O qui transforme le point A en B.
- b.** Préciser les éléments caractéristiques de la similitude f .

Partie B. Étude d'une transformation

Le but de cette partie est d'étudier la transformation $g = s \circ f$, où f désigne la similitude définie dans la partie A et s la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$.

1. Soit M un point quelconque du plan. On désigne par M' l'image du point M par la transformation g .

On note z et z' les affixes respectives des points M et M' , et $\bar{z}$ le conjugué de z .

- a.** Démontrer l'égalité : $z' = 2 e^{-\frac{i\pi}{6}} \bar{z}$
- b.** On pose $C = g(A)$ et $D = g(B)$. Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.
- c.** Quelle est la nature du triangle OAC ?
- d.** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
2. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation. Déterminer la nature de la transformation $g \circ g$ et préciser ses éléments géométriques.

Centres étrangers Juin 2012

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k ; 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.

Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par $a = 2n^2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.

Affirmation : pour tout entier naturel n , le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et à $n + 17$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère le point A d'affixe $3 + 4i$.

On note s la similitude directe de centre A, de $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Affirmation : la similitude directe réciproque s^{-1} a pour écriture complexe : $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-1+7i}{2}$.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = 1 + 2i, b = 4 - i, c = 1 - 2\sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3}) \text{ et } d = 4 + \sqrt{3} + 4i\sqrt{3}.$$

Affirmation : la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\frac{\pi}{3}$.

Liban mai 2012

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note z_n la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n + 1, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n .

1. Calculer les affixes des points A_1 , A_2 et A_3 . Placer ces points dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
2. *a.* Montrer que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une similitude directe s , dont on définira le rapport, l'angle et le centre Ω , d'affixe ω .
b. Démontrer que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle.
3. *a.* Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$.
b. À partir de quelle valeur de n les points A_n sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 ?
4. Pour tout entier naturel n , on note a_n la longueur $A_n A_{n+1}$ et L_n la somme $\sum_{k=0}^n a_k$.

L_n est ainsi la longueur de la ligne polygonale $A_0 A_1 \dots A_n A_{n+1}$.

Déterminer la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A_n , Ω et A_{n+4} sont alignés.

Métropole juin 2012

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i, z_B = 2i \text{ et } z_C = 1 + 3i$$

et D la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite D .

Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite D .

2. Résoudre l'équation $(1 + i)z + 3 - i = 0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite D .

Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1 + 2i$, fait correspondre le

point M' d'affixe :
$$\frac{1}{(1 + i)z + 3 - i}$$

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite D .

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1 + i)z + 3 - i$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g .

b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1 , images respectives par g des points A, B et C .

c. Déterminer l'image D_1 de la droite D par la transformation g et la tracer sur la figure.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\frac{1}{z}$.

a. Déterminer les affixes des points $h(A_1), h(B_1)$ et $h(C_1)$ et placer ces points sur la figure.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z , on a :

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z - 2| = |z|.$$

c. En déduire que l'image par h de la droite D_1 est incluse dans un cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

d. Démontrer que tout point du cercle C qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite D_1 .

5. Déterminer l'image par l'application f de la droite D .

Nouvelle Calédonie novembre 2012

Les deux parties sont indépendantes.

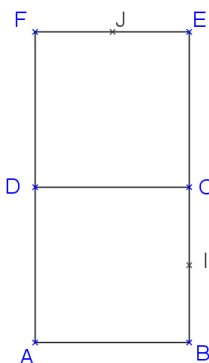
Partie A

On considère deux carrés directs ABCD et DCEF de côté 1. Le point I est milieu de [BC] et le point J est milieu de [EF] (voir figure ci-dessous).

1. On considère la rotation r de centre D qui transforme A en C. Justifier que $r(I) = J$.
2. Justifier que r est l'unique similitude directe qui transforme A en C et I en J.
3. On appelle s la similitude directe qui transforme A en I et C en J.

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- a. Donner les affixes des points A, C, I et J.
- b. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\frac{1}{2} + i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i$.
- c. Montrer que le point D est le centre de s .



Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère trois points M, N, P distincts entre eux et distincts du point O. On appelle m, n, p leurs affixes respectives.

On définit la similitude directe s_1 qui transforme O en M et N en P et la similitude directe s_2 qui transforme O en N et M en P.

1. Montrer que l'écriture complexe de s_1 est $z' = \frac{p-m}{n}z + m$.

On admet que l'écriture complexe de s_2 est $z' = \frac{p-n}{m}z + n$.

2. a. Montrer que si OMPN est un parallélogramme alors s_1 et s_2 sont des translations.
- b. On suppose que OMPN n'est pas un parallélogramme. Justifier que s_1 et s_2 ont chacune un centre, et montrer que ces deux points sont confondus.

Centres étrangers Juin 2011

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute justification complète sera valorisée.

Question 1

On considère l'équation (E) : $2x + 11y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.

Affirmation : Les seuls couples solutions de (E) sont les couples :

$$(22k - 2 ; -4k + 1),$$

avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2

On considère l'entier $N = 11^{2012}$.

Affirmation : L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3

On considère, dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 1 + i$, $b = 3i$, $c = 1 - 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})$

Affirmation : Le point C est l'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Question 4

On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives : $a = 1 + i$; $b = 2 - i$.

Soit f la similitude d'écriture complexe : $z' = \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) \bar{z} + \left(\frac{12}{5} + \frac{6}{5}i\right)$.

Affirmation : La transformation f est la réflexion d'axe (AB).

Question 5

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la surface S dont une équation est : $z = 4xy$.

Affirmation : La section de la surface S par le plan d'équation $z = 0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

La Réunion Juin 2011

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b .

On rappelle que :

$$\diamond (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) + 2n\pi, \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

$\diamond$ L'image du point B par la similitude directe de centre A , de rapport k ($k > 0$) et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = k AB \text{ et si } A \neq B, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta + 2n\pi, \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b, θ et k .

Partie B

On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

1. a. Montrer que le couple $(-1; -2)$ est une solution de (E).

b. Déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

2. Soient d et d' les droites d'équations respectives $y = 2x + 4$ et $3x - 2y = 1$.

a. Vérifier que pour tout entier relatif k , le point A_k de coordonnées $(k - 3; 2k - 2)$ appartient à la droite d .

On admettra que ce sont les seuls points de d à coordonnées entières.

b. Montrer que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2k' - 1; 3k' - 2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

3. a. Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que $A_k = B_{k'}$?

b. Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que le segment $[A_k B_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

c. Trouver l'entier q tel que $\overrightarrow{A_{3q} B_{2q}} = 4\vec{u}$.

4. Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω . On note H le milieu du segment $[A_6 B_4]$.

On désigne par f la similitude directe de centre Ω , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la similitude f .

b. Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point H soit l'origine O du repère.

Liban mai 2011

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = a z + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$ alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Partie B

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π .

On note D le symétrique de A par rapport au point C .

On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B .

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .
2. On appelle Ω le centre de la similitude s .
 - a. En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$, démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.
 - b. En déduire la nature du triangle ΩDC .
3. On pose $\sigma = s \circ s$.
 - a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
 - b. Déterminer l'image du point D par la transformation σ .
4. Démontrer que le quadrilatère $AD\Omega B$ est un rectangle.
5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives $0, 1, i$ et $2i$.
 - a. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = (1+i)z + 2 - i$$

où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par s .

- b. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .

Démontrer que $x' = x - y + 2$ et $y' = x + y - 1$

- c. Soit J le point d'affixe $1 + 3i$.

Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$, M' désignant l'image du point M par s ?

Antilles-Guyane juin 2010

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme $z' = a \bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété 2 : Soit C un point d'affixe c . Pour tout point D , distinct de C , d'affixe d et pour tout point E , distinct de C , d'affixe e , on a :

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}) = \arg \left(\frac{e-c}{d-c} \right) \quad (2\pi).$$

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points C et D d'affixes respectives $c = 3$ et $d = 1 - 3i$, et S_1 la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$ des réels.

a. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par S_1 . On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.

b. Donner l'expression complexe de S_1 .

3. Soit S_2 la similitude directe définie par :

– le point C_1 et son image C' d'affixe $c' = 1 + 4i$;

– le point D_1 et son image D' d'affixe $d' = -2 + 2i$.

a. Montrer que l'expression complexe de S_2 est : $z' = iz + 1 + i$.

b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

4. Soit S la similitude définie par $S = S_2 \circ S_1$. Déterminer l'expression complexe de S .

5. On pourra admettre désormais que S est la similitude indirecte d'expression complexe : $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

a. Quelle est l'image de C par S ? Quelle est l'image de D par S ?

b. Soit H le point d'affixe h tel que : $h - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$.

Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.

c. Soit H' l'image de H par S . Préciser la nature du triangle $C'D'H'$ et construire le point H' (on ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H').

Asie juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points B, C et H d'affixes respectives :

$$b = 5i, \quad c = 10 \quad \text{et} \quad h = 2 + 4i.$$

Construire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Étude de la position du point H

a. Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).

b. Calculer $\frac{h}{h-c}$, et en déduire que $(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

2. Étude d'une première similitude

a. Calculer les rapports : $\frac{BH}{AH}$, $\frac{BA}{AC}$ et $\frac{AH}{CH}$.

b. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.

c. Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.

3. Étude d'une seconde similitude

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.

On note S_2 la similitude qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (-1 - 2i)\bar{z} + 10$.

Démontrer que S_2 est composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) , et d'une similitude directe dont le centre Ω appartient à (Δ) . Préciser (Δ) .

4. Étude d'une composée

a. Calculer le rapport de la similitude composée $S_2 \circ S_1$.

b. En déduire le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC

Centres étrangers juin 2010

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1 + i, b = -1 + 2i, c = 2 + 3i, m = 7 - 5i, n = 5 - i, p = 9 + i,$$

1. a) Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.
- b) Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.
- c) En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle NMP.

2. Une similitude directe

Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

- a) Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \right) z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$$

- b) Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s .
- c) Vérifier que la similitude s transforme le point C en M.

3. Une similitude indirecte

Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est : $z' = 2i \bar{z} + 3 - 3i$.

- a) Vérifier que :
$$\begin{cases} s'(A) = N \\ s'(B) = M \\ s'(C) = P \end{cases}$$

- b) Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k = 1 - i$.

- c) Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2. On pose : $f = s' \circ h$

Déterminer les images des points K et J par la transformation f . En déduire la nature précise de la transformation f .

- d) Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

La Réunion septembre 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 8 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\sqrt{2}}{4} (-1 + i) z$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .
2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .

a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n , $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i \frac{3n\pi}{4}}$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

La Réunion juin 2010

Partie 1 : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Prérequis :

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.

Soient A, B, C, D quatre points du plan; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ [2 π].

On considère le point C tel que ABCD est un carré.

Soit E le milieu du segment [AD], on considère le carré EDGF tel que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = \frac{\pi}{2}$ [2 π].

1.
 - a. Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.
 - b. Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g , affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.
 - c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(D) = F$ et $s(B) = D$.
2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s .
 - a. Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s .
 - b. Donner l'écriture complexe de cette similitude.
 - c. Déterminer, le centre Ω de la similitude directe s .

Liban juin 2010

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, le point A d'affixe $2 - i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On note I le milieu du segment [AB].

Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$. »

2. On appelle S l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.

Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k - 1 ; 3k - 1)$ où k est un entier relatif. »

3. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 0$ modulo 3, où $(x ; y)$ est un couple d'entiers relatifs.

Proposition 3 : « Il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k ($2 \leq k \leq n$), le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »

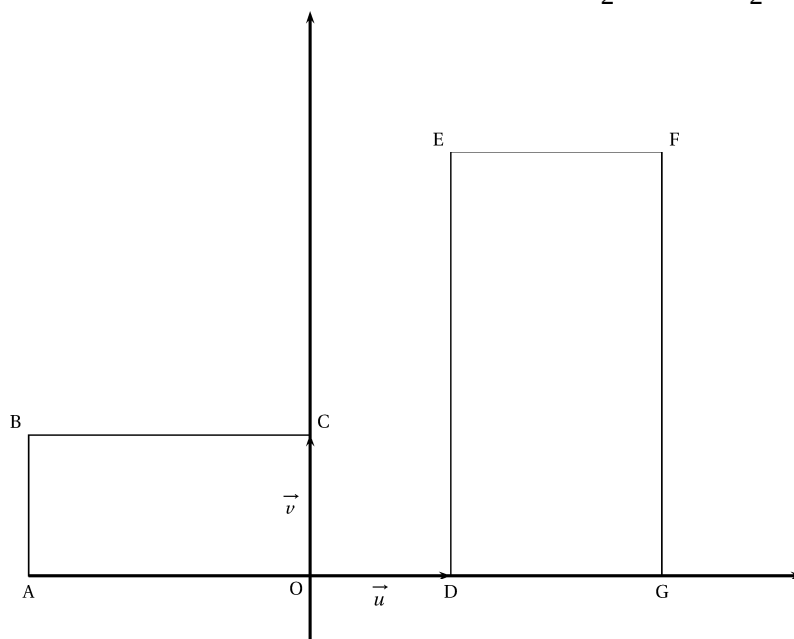
5. On considère l'équation (E') : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.

Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E'). »

Métropole La Réunion septembre 2010

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives :

$$z_A = -2, z_B = -2 + i, z_C = i, z_D = 1, z_E = 1 + 3i, z_F = \frac{5}{2} + 3i, z_G = \frac{5}{2}.$$



1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E .
a. Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = -\frac{3}{2}i z + 1.$$

- b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s .
c. Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude s ?
2. On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe

$$z' = -\frac{2}{3}i \bar{z} + \frac{5}{3}i.$$

- a. Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude s' .
b. On considère la similitude $g = s' \circ s$.

Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g .

- c. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

Métropole juin 2010

Dans tout l'exercice, $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

- 1) On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\bar{z} + 2$.
 - a) Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.
 - b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
 - c) Déterminer l'image par la transformation T du cercle C de centre O et de rayon 1.
- 2) C' désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.
 - a) Construire le point A' appartenant au cercle C' tel que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2π].
 - b) À tout point M du cercle C d'affixe z, on associe le point M' du cercle C' d'affixe z' tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \frac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

Déterminer le module et un argument de $\frac{z' - 2}{z}$.

En déduire que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

- c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment [MM']. Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle C ?

Amérique du Sud novembre 2009

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que $(\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA].

Γ_1 désigne le cercle de diamètre [AI] et Γ_2 désigne le cercle de diamètre [BK].

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(A) = I$ et $s(B) = K$.
 2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s .
 3. *a.* Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s .
 - b.* Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].
 4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
- Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés. (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct

$$\left(A ; \frac{1}{10} \overline{AB}, \frac{1}{10} \overline{AD} \right).$$

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.
2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{i}{2} z + 5 + 5i.$$

3. Calculer l'axe ω du centre Ω de s .
4. Calculer l'axe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.
5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω .

Antilles-Guyane juin 2009

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}.$$

On note A le point d'affixe $2i$.

Affirmation : f est la similitude directe, de centre A , d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

2. **Affirmation :** $1\,991^{2\,009} \equiv 2 \pmod{7}$.

3. a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Affirmation : $a \equiv b \pmod{p}$ si et seulement si $na \equiv nb \pmod{p}$.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

E est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note S la section de E par le plan d'équation $y = 3$.

Affirmation : S est un cercle.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

P est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Affirmation : O le seul point d'intersection de P avec le plan (yOz) à coordonnées entières.

Polynésie juin 2009

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connu le résultat suivant : Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = a z + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2i, z_B = 2, z_C = 4 + 6i, z_D = -1 + i \text{ et } z_E = -3 + 3i.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.

a. Donner l'écriture complexe de f .

b. Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.

c. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f .

d. En déduire la nature du triangle DAE.

4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre [AB] et par (Γ_2) le cercle de diamètre [AD].

On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).

a. Déterminer l'image de M par la similitude f .

b. En déduire la nature du triangle ΩMN .

c. Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.

Pondichéry avril 2009

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :
 $S(O) = A$ et $S(A) = B$.

2. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + i$.

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n l'afixe de A_n . (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = 1 - (1 - i)^n$.

b. Déterminer, en fonction de n , les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$. Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$.

c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n .
Construire les points A_3 et A_4 .

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

Antilles-Guyane septembre 2008**PARTIE A :**

On considère le système de congruences :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}, \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \text{ et } z'' = e^{i \frac{\pi}{5}} z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .
2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives :

$$a_0 = 2 e^{-i \frac{2\pi}{3}} \text{ et } b_0 = 4 e^{-i \frac{\pi}{5}}.$$

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences : $A_{n+1} = f(A_n)$ et $B_{n+1} = g(B_n)$.

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n .

- a. Quelle est la nature de chacun des triangles $OA_n A_{n+1}$?
- b. En déduire la nature du polygone $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.
3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- b. Indiquer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}})$.
- c. En déduire la nature du polygone $B_0 B_2 B_4 B_6 B_8$.
4. a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n .
- b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

Centres étrangers juin 2008

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ l'unité graphique est 2 cm.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2, b = 2 + 3i, c = 3i, d = -\frac{5}{2} + 3i \text{ et } e = -\frac{5}{2}.$$

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.
2. On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.

Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.

3. Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE

- a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.
- b. Démontrer que la similitude s transforme OABC en ABDE.
- c. Quel est l'angle de la similitude s ?
- d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s \circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω .

4. Étude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED

- a. Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est :

$$z' = -\frac{3}{2}i \bar{z} + 2 + 3i \text{ où } \bar{z} \text{ désigne le conjugué du nombre complexe } z.$$

- b. Montrer que s' transforme OABC en BAED.
- c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

La Réunion juin 2008

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + i, z_B = 5 + 2i \text{ et } z_C = i.$$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) \bar{z} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

b. En déduire l'affixe de C' , symétrique de C par rapport à (AB).

c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite (D) d'équation $4x + 3y = 1$.

d. Vérifier que le point C' appartient à (D).

2. a. Démontrer que les droites (D) et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω .

b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe (D) et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f .

d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation : $4x + 3y = 1$.

b. Déterminer les points de (D) à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

Liban juin 2008

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère la similitude directe f d'écriture complexe :

$$z \rightarrow \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i$$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :

Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

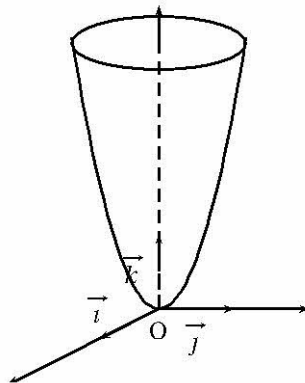
3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation :

$$11x - 5y = 14.$$

Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La surface Σ ci-dessous a pour équation $z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole »

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel :

Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leq a \leq b \leq 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k) dk$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a, b]$.

Métropole & La Réunion septembre 2008

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = f(A_n)$.

1. a. Étant donné un point M d'affixe z , déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f .

b. Construire les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n e^{i \frac{n\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $(O ; \vec{u})$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n .

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $(O ; \vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

Métropole juin 2008

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.

Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1, -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2 ; 3)$

3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2}{3}iz + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$.

Déterminer l'image de A par s , puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s .

4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s .

a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n .

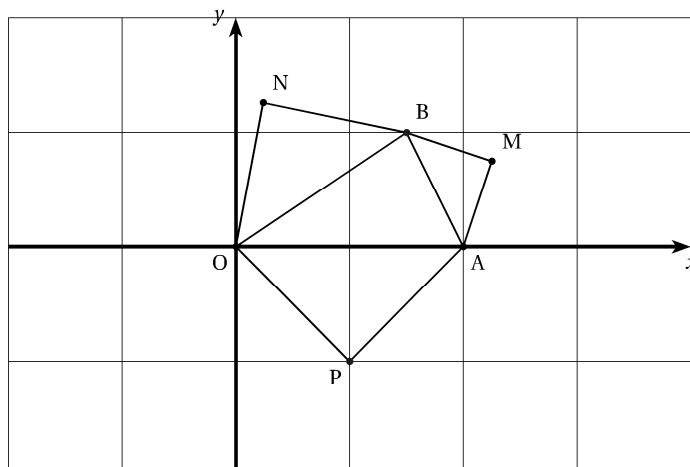
b. À partir de quel entier n le point B_n appartient-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

Nouvelle-Calédonie novembre 2008

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$. On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations

- Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 .
- Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r .
- Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
- Quelle est l'image du point O par r ?
- En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

- Donner les écritures complexes de s_1 et s_2 . On utilisera les résultats de la question 1. a.
- En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.
- Donner, sans justification, l'afixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Polynésie juin 2008

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

1. **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. »

2. Soit x un entier relatif.

Proposition 2 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ si et seulement si $x \equiv 1 \pmod{5}$. »

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - i$ a pour écriture complexe :

$$z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}.$$

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère un point A . On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A .

Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

Pondichéry avril 2008

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = a z + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B' , alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - i, z_B = 1 - i\sqrt{3}, z_C = \sqrt{3} + i \text{ et } z_D = -1 + i\sqrt{3}.$$

1.
 - a. Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D .
 - b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
 - c. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du

quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2.$$

- a. Déterminer les éléments caractéristiques de g .
- b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O .
- c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

Amérique du Nord juin 2007

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique : 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 + 5i, b = -4 + 2i \text{ et } c = 1 + 4i.$$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
2. a. Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f .
- b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.
3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.

Soit M' l'image de M par f .

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Vérifier que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E).
 - b. Résoudre l'équation (E).
 - c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux.

Placer ces points sur la figure.

Amérique du Sud novembre 2007

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i .

On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB) .

Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe :

$$z' = -i \bar{z} + 1 + i.$$

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2 . Donner l'écriture complexe de H .

3. On note f la composée $H \circ S$.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f .

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f .

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM''} = -2 \overrightarrow{AM}$$

est la droite (AB) .

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{AM''} = 2 \overrightarrow{AM}$$

est la perpendiculaire en A à la droite (AB) .

Antilles-Guyane septembre 2007

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = t \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = t \overrightarrow{CA}$.
Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

On note a, b, c, m, n et p , les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.
 - a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t .
 - b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

On notera G ce centre de gravité.

- c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ .

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

- a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{A(1-t); B(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$.

On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

- b. Soit σ_1 , la similitude directe de centre G de rapport $\frac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$.

Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.

- c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ .

Antilles-Guyane juin 2007

$(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 1 + i$.

On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O ; \vec{u})$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.

On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s .
4. *a.* Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s .
- b.* Montrer que $z_B = -3i z_A$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
5. Soient M le milieu de [AB] et P l'image de M par s . Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de [BC].
2. *a.* Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.
- b.* Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).
- c.* Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

Asie juin 2007

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5 i.
 - a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.
 - b. Déterminer les éléments caractéristiques de s . On note Ω son centre.
 - c. Déterminer le point $s \circ s(B)$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.
2. On note D la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A' et B' les points d'affixes respectives $8 + 4i$ et $2 + i$.
 - a. Démontrer que les points A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite D.
 - b. Vérifier que $s(B') = A'$.
 - c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A'B'].

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

1. On note encore s est la similitude directe telle que :
$$s(O) = A \text{ et } s(B) = O.$$

Soit Ω son centre.

- a. Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$.
- b. Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].)

En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. On désigne par D une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).

On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite D.

 - a. Déterminer les images des droites (BB') et D par la similitude s .
 - b. Déterminer le point $s(B')$.
 - c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A'B']

Centres étrangers juin 2007

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}\bar{z} + 2i\sqrt{2} - 2$, et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de a et de b l'axe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de f

Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe :

$$z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).
2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$,

III. Deuxième décomposition de f

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω . Déterminer l'axe ω de Ω .
2. Soit D la droite d'équation : $y = x + 2$.

Montrer que pour tout point N appartenant à D , le point $f(N)$ appartient aussi à D .

3. Soit σ la réflexion d'axe D et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.

a. Donner l'écriture complexe de σ .

(Indication : on pourra poser $z' = ai + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b .)

b. En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.

c. Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie,

La Réunion juin 2007

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C, désignent les points d'affixes respectives :

$$a = -2\sqrt{3}, b = \sqrt{3} - 3i \text{ et } c = 2i.$$

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.

Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ et de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AC})$.

2. Les points E et F ont pour affixes respectives :

$$e = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \text{ et } f = -\sqrt{3} - i.$$

a. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés,

b. Démontrer que le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire $k i$ où k est un nombre réel à déterminer.

Interpréter géométriquement ce résultat.

On admet que, de façon analogue, $\frac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire $k' i$ où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

c. Placer les points E et F sur la figure.

3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est $z \rightarrow \frac{1}{2} \bar{z} - \sqrt{3}$.

Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point S(H) sur la figure.

Liban juin 2007

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2i z + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + i \frac{2}{5}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1; 0; 5)$ et de rayon 5 ».

3. **Proposition 3 :** « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

Métropole juin 2007

La figure est proposée en annexe 1. Elle sera complétée tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives :
 $-5 + 6i$, $-7 - 2i$ et $3 - 2i$.

On admet que le point F, d'affixe $-2 + i$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1. Soit H le point d'affixe -5 .

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.

2. a. Étant donné des nombres complexes z et z' , on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' . Soient a et b des nombres complexes.

Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a \bar{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'.

Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s . Quelle est alors la nature de s ?

b. En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).

c. Vérifier que le point E est un point du cercle Γ .

3. Soit I le milieu du segment [AC].

Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.

Démontrer que les points H, G et F sont alignés.

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.

On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O , de rapport λ et d'angle θ . Soit :

- les points A' et B' , images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I , milieu du segment $[A'B]$ et J , milieu du segment $[A'B']$;
- le point M milieu du segment $[AA']$;
- le point H , projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H' image du point H par la similitude σ .

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6 + 4i$, le point B a pour affixe $2 + 4i$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe 4 i.

1. Déterminer les affixes des points A', B' et H'.
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').

1. a. Montrer que H' est le projeté orthogonal du point O sur la droite $(A'B')$.

- c. En déduire que $\frac{MJ}{MI} = \frac{OH'}{OH}$

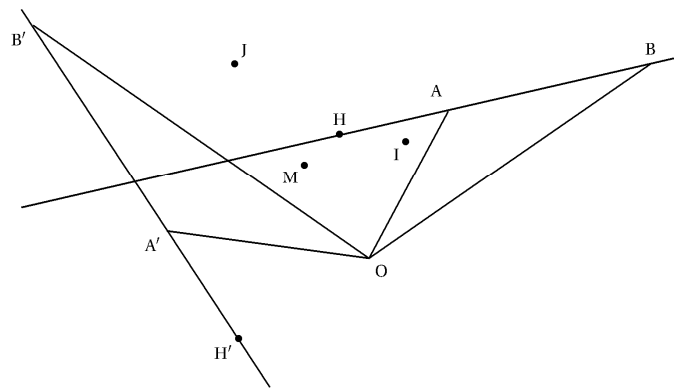
2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H . On note K l'image du point J par la similitude s .

- Montrer que $\overline{OK} = \overline{OH'}$,
puis que $(\overline{MI}, \overline{MJ}) = (\overline{OH}, \overline{OK}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- En déduire que le point H' est l'image du point J par la similitude s .
- Montrer que $(\overline{IJ}, \overline{HH'}) = (\overline{MI}, \overline{OH}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').

Cette page ne sera pas remise avec la copie

Partie B



Pondichéry avril 2007

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

- La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
- la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
- une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que $s(A) = s'(A)$, $s(B) = s'(B)$ et $s(C) = s'(C)$.

Montrer que $s = s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'abscisse 2, E d'abscisse 1 + i, F d'abscisse 2 + i et G d'abscisse 3 + i.

- a. Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.
- b. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S, en déterminant l'écriture complexe de S.
- c. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On pose $A' = h(A)$ et $G' = h(G)$, et on appelle I le milieu de $[EA']$.

On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $S = \sigma \circ h$.

Antilles-Guyane juin 2006

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r .
 - b. Déterminez les images de R et de P par r .
 - c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.
3. On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR]. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 - a. Déterminez les images respectives de R et de P par s .
 - b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
 - c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

Amérique du Nord juin 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).

Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \rightarrow \frac{1+i}{2}z + 1 - i$.

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z . On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M' .
Montrer que $z - z' = i(2 - z')$.

2. a. Question de cours

• **Prérequis** : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul.
Propriétés algébriques des modules et des arguments.

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a , alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est

le point Q d'affixe q telle que $q - a = i(p - a)$.

b. Dédurre des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Q .

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + i$.

On considère la suite (A_n) de points du plan définis par : pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'affixe a_n de A_n est donnée par : $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$.

b. Déterminer l'affixe de A_5 .

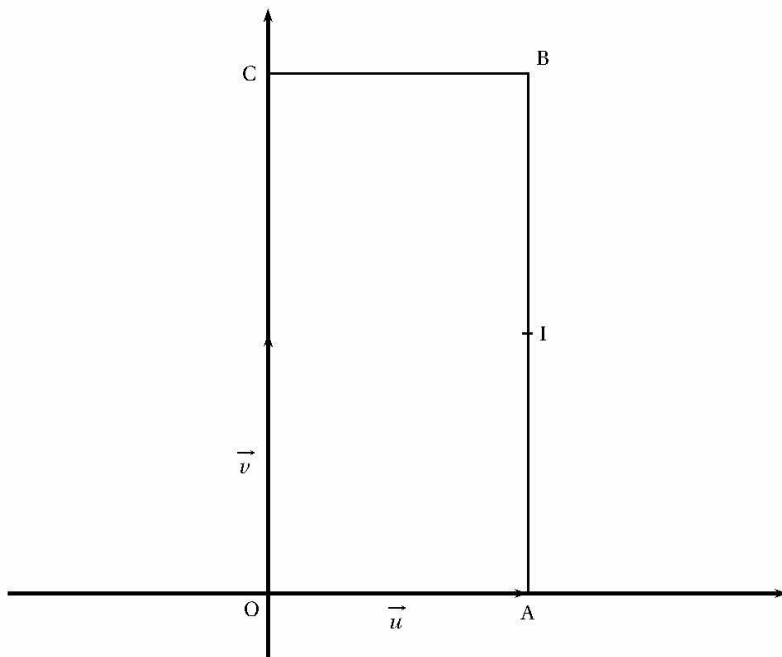
4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait : pour $n > n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Antilles–Guyane septembre 2006

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A et C les points d'afixes respectives 1 et $2i$.

Sur le dessin joint en annexe (à rendre avec la copie), le quadrilatère OABC est un rectangle et I désigne le milieu de [AB].



1. a. Justifier le fait qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme O en I et A en C.
b. Déterminer l'écriture complexe de s . En déduire les éléments caractéristiques de s et, en particulier, établir que l'afixe du centre Ω de s vaut $\frac{1+3i}{5}$.

c. Vérifier par un calcul que Ω est situé sur le cercle Γ de centre A passant par O.

2. Soit f l'application du plan complexe d'écriture complexe :

$$z \mapsto \frac{-3-4i}{5} z + \frac{8+4i}{5}.$$

a. Déterminer les images par f des points A et C. En déduire la nature précise de f , puis démontrer que I est l'image de Ω par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

b. Construire le cercle Γ sur le dessin et placer également le point Ω en utilisant les informations géométriques précédentes.

3. A tout point M d'image M' par s , on associe le point M'' défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$.

a. Quel est le point Ω'' associé à Ω ?

b. Construire avec soin le point A'' en laissant les traits de construction.

c. On suppose maintenant que M a pour affixe z . Démontrer que M'' a pour affixe $z'' = iz + \frac{4+2i}{5}$.

En déduire que M'' est l'image de M par une similitude dont on donnera les éléments caractéristiques.

d. Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble Γ'' des points M'' lorsque M décrit le cercle Γ .

La Réunion juin 2006

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s . Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .
2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ].
Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 . Placer Ω sur la figure.
3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.
4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle-même).
 - a. Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
 - b. Trouver l'image du point A par h . En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2 + 2i$ et $2i$.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = \frac{1}{2} i z + 1 + i.$$

2. Calculer l'affixe du point Ω .
3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E sur la figure.

Nouvelle-Calédonie novembre 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (unité 1 cm).

On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des

points A, B, C, D et E par la rotation r . Montrer que B a pour affixe $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant :

$$\left\{ -3; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

3. a. Déterminer $r(F)$.

- b. Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?

4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F

en C.

- a. Déterminer l'angle et le rapport de s' . En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.

- b. Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?

- c. Déterminer l'écriture complexe de s' .

5. Soit A' le symétrique de A par rapport à C.

- a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de A' par $s' \circ s$.

- b. Calculer l'affixe du point A'. Retrouver alors le résultat du a. en utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$.

Pondichéry avril 2006

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 5 cm pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$.

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ .
2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n , on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.
- a. Déterminer les affixes des points A_1, A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 .
- b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- c. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?
3. a. Quelle est la nature du triangle $A_0 A_1$?
En déduire, pour tout entier naturel n , la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
- b. Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.
Exprimer ℓ_n en fonction de n .
Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

France septembre 2005

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}.$$

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$ ou $x \equiv 5 \pmod{6}$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x; y) = (34k - 7; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :

$$(x; y) = (17k - 7; 5 - 12k), k \in \mathbb{Z}.$$

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :

$$(x; y) = (-7k; 5k), k \in \mathbb{Z}.$$

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,7892\,005$. On a alors : A : $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$.

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4 \pmod{17}$.

D : $p \equiv 1 \pmod{17}$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b . Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

$$A : z = \frac{b - ia}{1 - i} \qquad B : z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a).$$

$$C : a - z = i(b - z). \qquad D : b - z = \frac{\pi}{2}(a - z).$$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Nouvelle-Calédonie novembre 2005

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Unité graphique : **4 cm**

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_I = 1, z_J = i, z_H = 1 + i, z_A = 2, z_B = \frac{3}{2} + i, z_C = 2i \text{ et } z_D = -1$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1 + \frac{1}{2}i$.

3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe :

$$z' = -i \bar{z} + 2i.$$

1. Déterminer les images des points O, A, B par f .
2. a. Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?
b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1} .
4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.
a. Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -i \bar{z} + 1 + i$.
b. Montrer que I et J sont invariants par s . En déduire la nature de s .
c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

Amérique du Nord Juin 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A, A', B et B' d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - 2i, z_{A'} = -2 + 4i, z_B = 3 - i, z_{B'} = 5i.$$

1. a. Placer les points A, A', B et B' dans le plan complexe. Montrer que ABB'A' est un rectangle.
- b. Soit s la réflexion telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. On note (Δ) son axe. Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.
- c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z .

$$\text{Montrer que } z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) \bar{z} + 2i - 1.$$

2. Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \right) \bar{z} + 5 - i.$$

- a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.
- b. Soit Ω le point d'affixe $1 + i$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2 . Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h .
- c. Soit M_1 , d'affixe z_1 , l'image par h de M, d'affixe z . Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1 .
3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.
- a. Déterminer l'expression complexe de f .
- b. Reconnaître f . En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

Liban juin 2004

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 2 + i, z_B = 1 + 2i, z_C = 6 + 3i, z_D = -1 + 6i.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$.

Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit J le point d'affixe $3 + 5i$.

Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4. On appelle I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs de segments [AC] et [BD].

Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère IMJN.

5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs.

a. Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q .

b. Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP})$ et $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ})$.

En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.

c. En déduire que J est l'image de M par g . Que peut-on en déduire pour J ?

Amérique du Nord Juin 2003

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives :

$$z_0 = 5 - 4i, z_1 = -1 - 4i, z_2 = -4 - i.$$

1. a. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

b. Etablir que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1-i}{2} z + \frac{-3+i}{2}$.

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S .

d. On considère un point M , d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M' , d'affixe z' .

Vérifier la relation : $\omega - z' = i(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega M M'$.

2. Pour tout entier naturel n , le point A_{n+1} , est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = A_n A_{n+1}$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6 .

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

a. Exprimer v_n en fonction de n .

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. a. Calculer en fonction de n le rayon r_n , du cercle circonscrit au triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

Amérique du Sud Novembre 2003

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.

2. Soit I le point d'affixe 1.

On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique C de centre O. Sa position initiale est en I.

On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle C après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).

On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).

Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle C à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6 .

On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2 .

2. On pose $S_m = s_1 \circ s_1 \dots \circ s_1$ (composée de m fois s_1 , m étant un entier naturel non nul),

$S'_n = s_2 \circ s_2 \dots \circ s_2$ (composée de n fois s_2 , n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n \circ S_m$.

a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m \frac{\pi}{3} + n \frac{6\pi}{5}$.

b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144?

c. On appelle M le point d'affixe 6 et M' son image par f . Peut-on avoir $OM' = 240$?

Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique (m, n) tel que $OM' = 576$.

Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$.

Pondichéry avril 2003

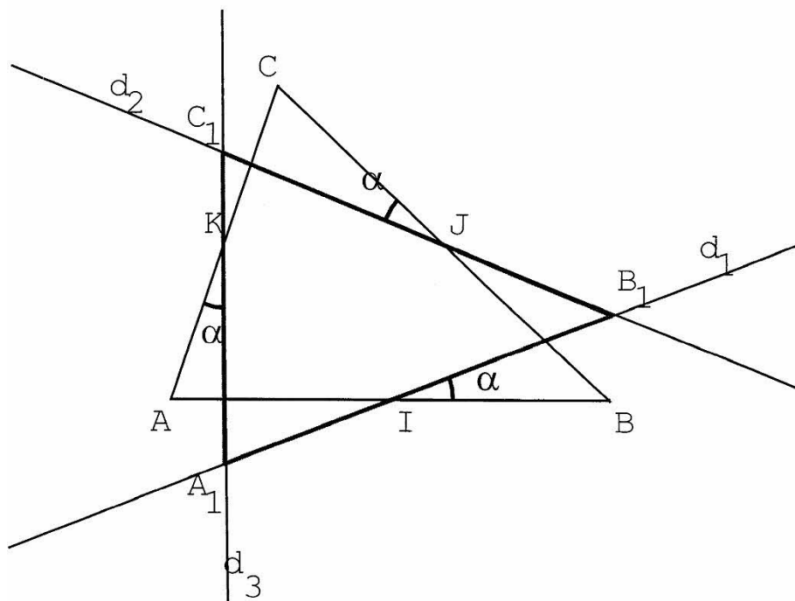
Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Première partie

ABC est un triangle direct du plan orienté.

On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].

Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe ci-jointe sur laquelle on raisonnera.



d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α . d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α . d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α . A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3 , B_1 celui de d_1 et d_2 , et C_1 celui de d_2 et d_3 .

1° On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1 . Montrer que les triangles H I B et H B₁ J sont semblables.

2° En déduire que les triangles ABC et A₁ B₁ C₁ sont semblables.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

A - Construction de la figure

1° Placer les points A (- 4 - 6 i), B (14), C (- 4 + 6 i), A₁ (3 - 7 i), B₁ (9 + 5 i) et C₁ (- 3 - i).

2° Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.

3° Montrer que A₁, I, B₁ sont alignés.

On admettra que B₁, J, C₁ d'une part, et C₁, K, A₁ d'autre part sont alignés.

4° Déterminer une mesure en radians de l'angle ($\vec{IB}$, $\vec{IB_1}$).

On admettra que ($\vec{KA}$, $\vec{KA_1}$) = $\frac{\pi}{4}$ et ($\vec{JC}$, $\vec{JC_1}$) = $\frac{\pi}{4}$.

5° Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

B Recherche d'une similitude directe s transformant ABC en A₁ B₁ C₁.

On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C respectivement en A₁, B₁ et C₁.

1° Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) z + 2 - 2i$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point

et de son image par s.

2° a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Déterminer l'affixe du centre Ω de s.

3° Que représente le point Ω pour le triangle ABC ?

Asie Juin 2001

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \bar{z}$.

a. Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z .

b. Montrer que $f = R \circ S$, où R est une rotation et S une symétrie axiale ; (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).

c. Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe D_1 .

Réaliser une figure, en y représentant l'axe D_1 . (Unité graphique : 2 cm).

2. On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M'' d'affixe z'' telle que

$$z'' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \bar{z} - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g .

b. Montrer que $g = T \circ f$, où T est une translation ; (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).

c. Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté D_2 .

d. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$?

En déduire une construction de la droite D_2 , qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

France métropolitaine juin 2000

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, b = e^{i\frac{\pi}{3}}, c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1. a. Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d .
- b. Représenter les points A, B, C et D.
- c. Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'axe f du point F.
6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'axe z , associe le point M' d'axe z' telle que :

$$z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \bar{z} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe S .

- a. Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'axe z_1 associe le point M'_1 d'axe z'_1 telle que : $z'_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_1 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

- b. En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $(\vec{AO}, \vec{AB})$, puis déterminer la droite Δ telle que : $r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(AO)}$.
- c. Montrer que $\varphi = r \circ \sigma_{(AO)}$. En déduire la nature de φ .

Amérique du Sud Novembre 1998

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ l'unité graphique est 4 cm.

On considère les points $A(1 ; 0)$, $C(0 ; 1)$, $D(0 ; 1)$ et le cercle Γ de centre O et de rayon 1.

Soit M un point du cercle Γ , d'ordonnée positive ou nulle, et distinct de C .

La droite (DM) rencontre l'axe des abscisses au point I .

Le point N est le point d'intersection de la droite (OM) et de la parallèle à la droite (CD) passant par I .

1. Réaliser la figure.

2. On note t une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

On se propose de déterminer l'ensemble (F) décrit par le point N lorsque t décrit l'intervalle $[0 ; \pi]$ privé de $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t .

b. Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\frac{\cos t}{1 + \sin t} ; 0 \right)$

puis que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de N sont :

$$x(t) = \frac{\cos t}{1 + \sin t} \quad y(t) = \frac{\sin t}{1 + \sin t}.$$

3. a. Comparer d'une part $x(t)$ et $x(\pi - t)$, puis d'autre par $y(t)$ et $y(\pi - t)$.

En déduire une propriété géométrique de l'ensemble (F) .

b. Faire l'étude conjointe des variations des fonctions $t \rightarrow x(t)$ et $t \rightarrow y(t)$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$.

c. Déterminer les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$.

4. a. Calculer, en fonction de t , la distance ON puis la distance de N à la droite d'équation $y = 1$.

b. Tracer l'ensemble (F) .