

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

1. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$ en fonction de t .

b. En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?

3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

4. La durée d'attente T , en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$: $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ (avec $\lambda = \frac{1}{6}$) où t désigne le temps

exprimé en minutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total soit inférieur à 5 minutes ?

A 0,281 9 B 0,393 5 C 0,565 4 D 0,606 5

CORRECTION

1. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$ en fonction de t .

En prenant :

$$u'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad u(x) = -e^{-\lambda x}$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^t - \int_0^t -e^{-\lambda x} dx$$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = -t e^{-\lambda t} - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^t$$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = -t e^{-\lambda t} - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} - t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

b. En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$.

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

Soit $X = \lambda t$, $\lambda > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} X = +\infty$

$$t e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} X e^{-X} \text{ or } \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-\lambda t} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} e^{-X} \text{ or } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \text{ Le temps moyen est } \frac{1}{\lambda}.$$

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?

Si le temps moyen est de 5 min alors $\frac{1}{\lambda} = 5$ donc $\lambda = 0,2$

$$p(X > t) = e^{-\lambda t} \text{ donc } p(X > 10) = e^{-0,2 \times 10} = e^{-2} \approx 0,135$$

$$p(X > 5) = e^{-0,2 \times 5} = e^{-1} \approx 0,368$$

3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

$$p_{(X > 10)}(X > 10 + 5) = \frac{p((X > 10) \cap (X > 10 + 5))}{p(X > 10)}$$

$$p_{(X > 10)}(X > 10 + 5) = \frac{p((X > 15))}{p(X > 10)} = \frac{e^{-15\lambda}}{e^{-10\lambda}} = e^{-15\lambda + 10\lambda}$$

$$p_{(X > 10)}(X > 10 + 5) = e^{-5\lambda} = e^{-1} \approx 0,368$$

La probabilité obtenue est identique à $p(X > 5)$; la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement.

4. Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total soit inférieur à 5 minutes ?

$$p_{(X > 2)}(X \leq 5) = 1 - p_{(X > 2)}(X > 5)$$

$$p_{(X > 2)}(X \leq 5) = 1 - p(X > 3)$$

$$p_{(X > 2)}(X \leq 5) = 1 - e^{-3\lambda} = e^{-0,5} \approx 0,6065$$