Polynésie juin 2014

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.

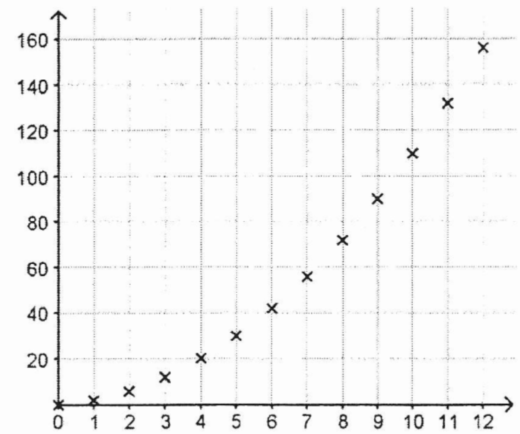
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	Entrée :	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	Traitement:	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 2 à $n - 1$:
	u prend la valeur $u + 2i + 2$		u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	Sortie :	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = a n^2 + b n + c$.

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n + 1)(n + 2)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

CORRECTION

1. Pour $n = 0$: $u_1 = u_0 + 2 = 2$

Pour $n = 1$: $u_2 = u_1 + 2 + 2 = 6$

2. Algorithme 2

L'algorithme 2 permet de calculer $u_n + 2n + 2$ donc convient.

3. *a.* Il semblerait que la suite (u_n) soit strictement croissante.

$u_{n+1} - u_n = 2n + 2$, $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

b. $u_0 = 0$ donc $c = 0$, donc u_n est de la forme $a n^2 + b n$

$u_1 = 2$ donc $a + b = 2$

$u_2 = 6$ donc $4a + 2b = 6$ soit $2a + b = 3$

$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$ donc $a = 1$ et $b = 1$, $u_n = n^2 + n$.

4. *a.* $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 2$ de la forme $v_0 + n r$ avec $v_0 = 2$ et $r = 2$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 de premier terme $v_0 = 2$.

b. On peut démontrer par récurrence cette propriété ou bien :

(v_n) est une suite arithmétique de raison 2 de premier terme $v_0 = 2$ donc $S_n = \frac{n+1}{2}(v_n + v_0) = \frac{n+1}{2}(2n + 4)$

$S_n = (n + 1)(n + 2)$.

c. On peut démontrer par récurrence cette propriété ou bien :

$$\begin{array}{rcrcl} v_0 & = & \cancel{u_1} & - & u_0 \\ v_1 & = & \cancel{u_2} & - & \cancel{u_1} \\ \dots & & & & \\ v_{n-1} & = & \cancel{u_n} & - & \cancel{u_{n-1}} \\ v_n & = & u_{n+1} & - & \cancel{u_n} \end{array}$$

Par addition terme à terme $S_n = u_{n+1} - u_0 = (n + 1)(n + 2)$ donc $u_n = n(n + 1)$