

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Détermination d'une similitude directe

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_B = -\sqrt{3} + i.$$

1. **a.** Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
- b.** Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.
2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f de centre O qui transforme le point A en B.
- b.** Préciser les éléments caractéristiques de la similitude f .

Partie B. Étude d'une transformation

Le but de cette partie est d'étudier la transformation $g = s \circ f$, où f désigne la similitude définie dans la partie A et s la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$.

1. Soit M un point quelconque du plan. On désigne par M' l'image du point M par la transformation g .

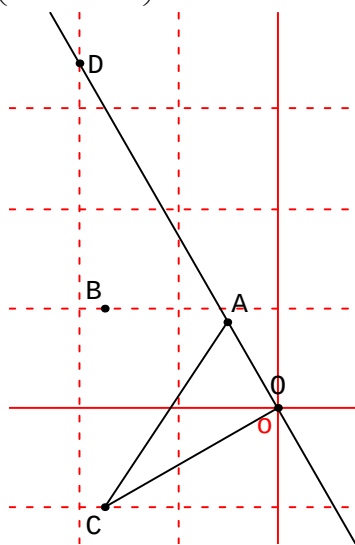
On note z et z' les affixes respectives des points M et M', et $\bar{z}$ le conjugué de z .

- a.** Démontrer l'égalité : $z' = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}} \bar{z}$
- b.** On pose $C = g(A)$ et $D = g(C)$. Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.
- c.** Quelle est la nature du triangle OAC ?
- d.** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
2. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation. Déterminer la nature de la transformation $g \circ g$ et préciser ses éléments géométriques.

CORRECTION

Partie A - Détermination d'une similitude directe

$$1. \text{ a. } z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } z_B = -\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}}$$



b.

2. **a.** Une similitude directe a une écriture complexe de la forme $z' = a z + b$, O est le centre de f donc $b = 0$

$$f(A) = B \text{ donc } 2 e^{i\frac{5\pi}{6}} = a e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ donc } a = 2 \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 2 e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2 e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ donc l'écriture complexe de la similitude directe } f \text{ de centre}$$

O qui transforme le point A en B est $z' = 2 e^{i\frac{\pi}{6}} z$.

- b.** Le rapport de f est égal à $|a|$ donc est égal à 2. L'angle de f est $\arg a$ donc est égal à $\frac{\pi}{6}$.

Partie B. Étude d'une transformation

1. a. L'écriture complexe de s est $z' = \overline{z}$ donc $M(z) \xrightarrow{f} M_1(z_1) \xrightarrow{s} M'(z')$ avec $z_1 = 2 e^{i \frac{\pi}{6}} z$ et $z' = \overline{z_1}$
 $z' = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \overline{z}$. L'écriture complexe de g est : $z' = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \overline{z}$

b. $z_C = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \overline{z_A} = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \times e^{-i \frac{2\pi}{3}} = 2 e^{i \frac{-5\pi}{6}}$ donc $z_C = -\sqrt{3} - i$

$z_D = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \overline{z_C} = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \times 2 e^{-i \frac{5\pi}{6}} = 4 e^{i\pi}$ donc $z_D = -2 + 2\sqrt{3}$.

c. $OA = |z_A| = 1$; $OC = |z_C| = 2$ et $AC^2 = |z_C - z_A|^2 = \left| \left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right) + i \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right|^2 = \left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$

$AC^2 = 3 + \frac{1}{4} - \sqrt{3} + 1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} = 5$ donc $AC^2 = OC^2 + OA^2$

Le triangle OAC est rectangle en O.

d. $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ et $\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(-2; 2\sqrt{3})$ donc $\overrightarrow{OD} = 4 \overrightarrow{OA}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires, les points O, A et D sont alignés.

2. La transformation $g \circ g$ a pour écriture complexe $z' = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \overline{z}$

$z' = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} 2 \overline{\left(2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \overline{z} \right)} = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}} \times 2 e^{\frac{i \pi}{6}} z = 4 z$

$g \circ g$ a pour écriture complexe $z' = 4 z$ donc $g \circ g$ est une homothétie de centre O de rapport 4.