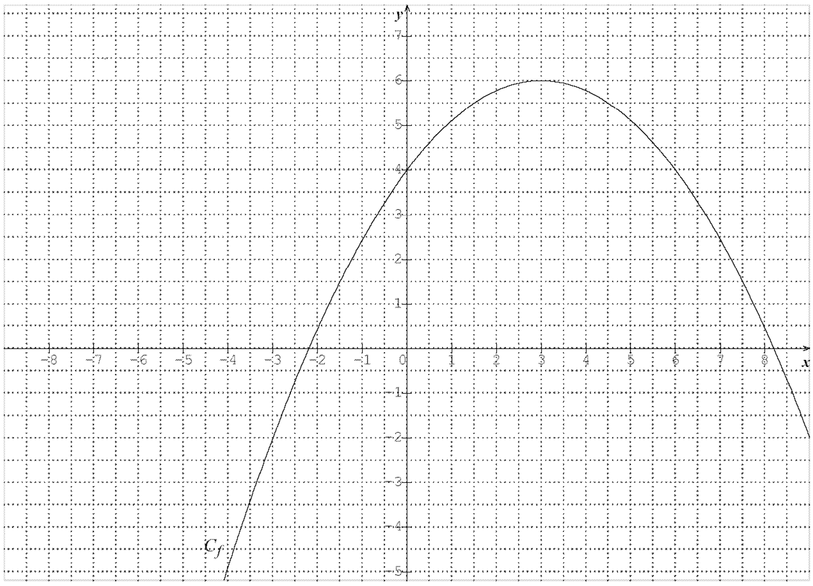
INTERPRETATION GRAPHIQUE

Ci-dessous la parabole représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$



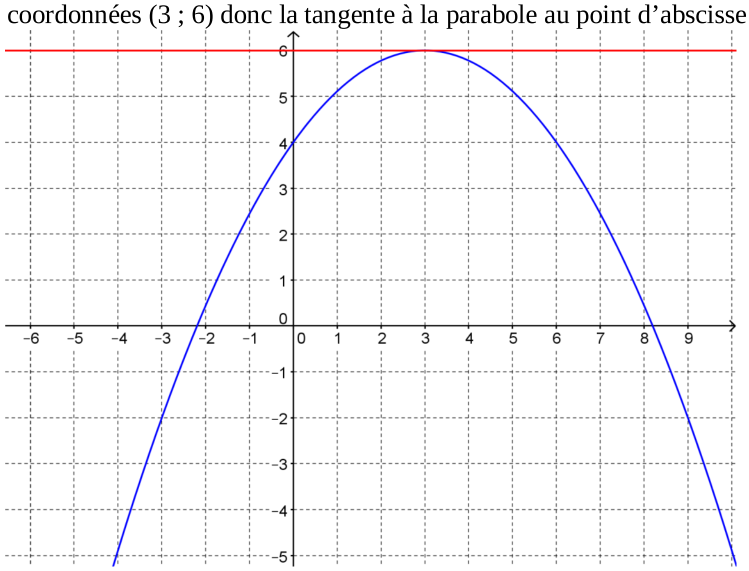
Soient les suites (U_n) et (V_n) :définies, pour tout entier naturel n, respectivement par : $U_n = f(n)$ et $\begin{cases} V_0 = a \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$ où a est un réel.

18.	La tangente à la parabole au point d'abscisse 3 a pour équation :		
a.	$x = 6$	***b.***	$y = 6$
c.	$y = 6\,x - 18$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b*.

Le sommet de la parabole a pour coordonnées (3 ; 6) donc la tangente à la parabole au point d'abscisse 3 a pour équation $y = 6$.



19.	Sur $\mathbb{R}$, la dérivée de f est définie par $f'(x) =$		
a.	$\dfrac{-4}{9}x - \dfrac{4}{3}$	***b.***	$\dfrac{-4}{9}x + \dfrac{4}{3}$
c.	$\dfrac{4}{9}x - \dfrac{4}{3}$	***d.***	$\dfrac{4}{9}x + \dfrac{4}{3}$

CORRECTION

Réponse *b*.

Le sommet de la parabole a pour coordonnées (3 ; 6) donc $f'(3) = 0$ donc les bonnes réponses sont soit *b*, soit *c*.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{-4}{9}x + \dfrac{4}{3}$	+	0	–

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{4}{9}x - \dfrac{4}{3}$	–	0	+

Sur $]-\infty\,;3]$, f est croissante donc $f'(x) > 0$ donc seule la réponse *b* est juste.

20.	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) =$		
a.	$-\infty$	***b.***	$+\infty$
c.	**0**	***d.***	*aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte*

CORRECTION

Réponse *a*.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\infty$

21.	$\int_{-1}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x$		
a.	est nulle	***b.***	strictement négative
c.	strictement positive	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *c*.

$f'(x) = \dfrac{-4}{9} x + \dfrac{4}{3}$ donc $f(x) = \dfrac{-4}{9} \times \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4}{3} x + k$

$f(0) = 4$ donc $k = 4$ donc $f(x) = \dfrac{-2}{9} x^2 + \dfrac{4}{3} x + 4$

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{-2}{9} \times \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4}{3} \times \dfrac{x^2}{2} + 4x$

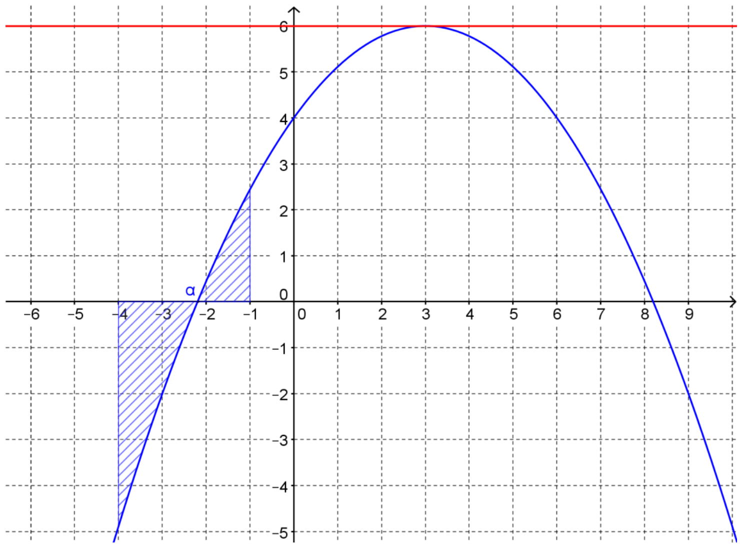
soit $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-2}{27} x^3 + \dfrac{2}{3} x^2 + 4x$

donc $\mathrm{F}(-1) = \dfrac{2}{27} + \dfrac{2}{3} - 4 = \dfrac{-88}{27}$

$\mathrm{F}(-4) = \dfrac{2}{27} \times 64 + \dfrac{2}{3} \times 16 - 4 \times 4 = -\dfrac{16}{27}$

$\mathrm{F}(-4) - \mathrm{F}(-1) = -\dfrac{16}{27} + \dfrac{88}{27} = \dfrac{72}{27} = \dfrac{8}{3}$

$\int_{-1}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas une aire car la fonction change de signe sur $[-2\,;-1]$



22.	La suite (U_n) est :		
a.	minorée non majorée	***b.***	majorée non minorée
c.	bornée	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b*.

$U_n = f(n)$ or pour tout x réel, $f(x) \leq 6$ donc pour tout entier n, $f(n) \leq 6$ donc U_n est majorée.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$, U_n n'est pas minorée.

23.	Pour $a = 1$, V_2 appartient à :		
a.	$[0\,;2]$	***b.***	$[2\,;4]$
c.	$[4\,;6]$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

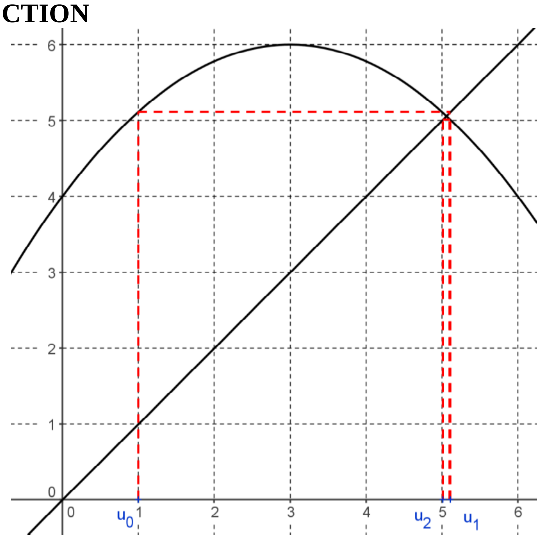
CORRECTION

Réponse *c*.

Pour $a = 1$, $V_0 = 1$, $V_1 = f(1)$ donc $V_1 \approx 5$

$V_2 = f(V_1)$ donc $V_2 \approx 5$

$\int_{-1}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas une aire car la fonction change de signe sur $[-2\,;-1]$



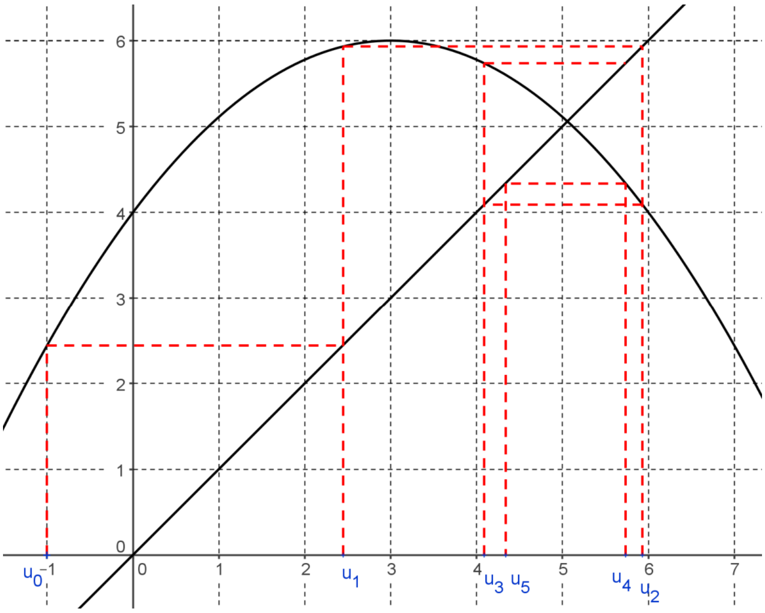
24. Pour $a = -1$, la suite (V_n) est :

a. constante — ***b.*** strictement décroissante

c. strictement croissante — ***d.*** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *d.*



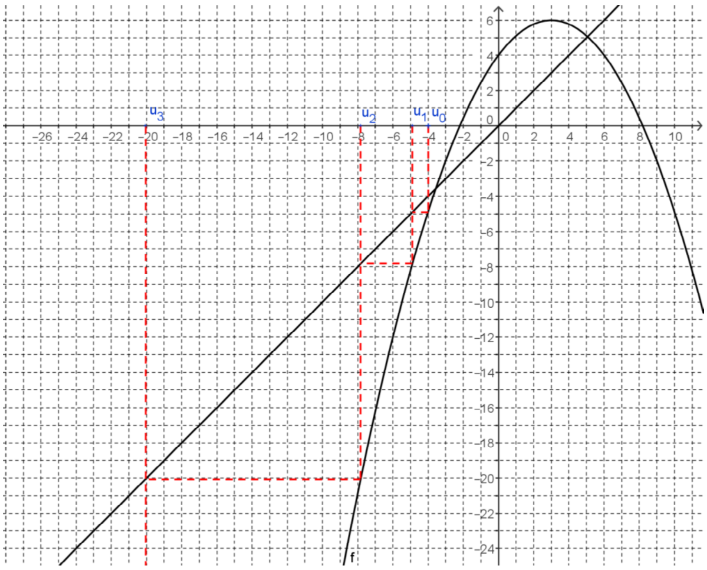
25. Pour $a = -4$, (V_n)

a. est convergente — ***b.*** diverge vers $-\infty$

c. diverge vers $+\infty$ — ***d.*** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b.*



LA TRIGONOMETRIE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

26. f est :

a. paire — ***b.*** impaire

c. paire et impaire — ***d.*** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *b.*

f est définie sur r donc pour tout réel, $-x$ est réel.

La fonction cosinus est paire donc $f(-x) = -x \cdot \cos\left(-\frac{x}{3}\right) = -x \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

$f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire

27. f est :

a.	périodique de période 2π	***b.***	périodique de période 6π
c.	périodique de période $2\pi/3$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *d*.

f est périodique de période $p \Leftrightarrow$ pour tout x réel, $f(x+p) = f(x)$

La fonction $x \to \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ est périodique de période 6π.

$\cos\left(\dfrac{x+6\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ mais $f(x+6\pi) = (x+6\pi)\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ donc $f(x+6\pi) \neq f(x)$.

28. Le nombre de solutions sur $[-2\pi ; 2\pi]$ de l'équation $f(x) = 0$ est :

a.	0,	***b.***	1,
c.	2,	***d.***	3

CORRECTION

Réponse *d*.

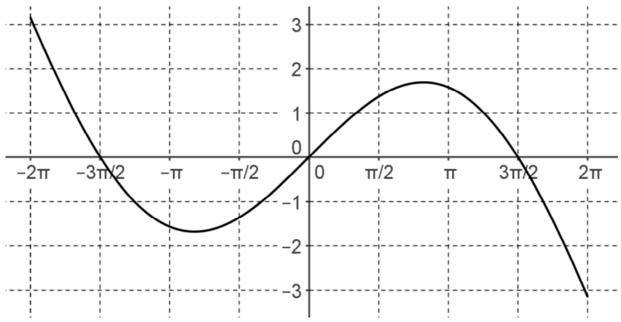
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) = 0$

Si $x \in [-2\pi ; 2\pi]$, $\dfrac{x}{3} \in \left[-\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right]$

$\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) = 0$ et $\dfrac{x}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{x}{3} = -\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{2}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) = 0$



29. Sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée f est définie par $f'(x) =$

a.	$-x\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$	***b.***	$\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + x \,.\, \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$
c.	$\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) - x\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *d*.

$f(x) = x \,.\, \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$. Soit $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) & v'(x) = -\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \end{cases}$ donc $f'(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) - \dfrac{x}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

30. Sur $\mathbb{R}$, la primitive F de f telle que $F(0) = 0$ est définie par $F(x) =$

a.	$\dfrac{x^2}{2}\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$	***b.***	$\dfrac{3x^2}{2}\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$
c.	$9\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + 3x\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *d*.

Pour la primitive proposée en *a*. : $F(0) = 0$

Soit $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{3} & u'(x) = \dfrac{2}{3}x \\ v(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right) & v'(x) = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) \end{cases}$ donc $F'(x) = \dfrac{2}{3}x\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) + \dfrac{x^2}{9} \times \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ donc $F'(x) \neq f(x)$ donc F n'est pas une primitive de f.

Pour la primitive proposée en *b*. : la seule différence avec la *a*. est que la fonction est multipliée par 3 donc $F'(x) \neq f(x)$ donc F n'est pas une primitive de f.

Pour la primitive proposée en *c.* : F(0) = 9 donc ne convient pas, on pouvait néanmoins vérifier que :

$\begin{cases} u(x) = 3x & u'(x) = 3 \\ v(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right) & v'(x) = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) \end{cases}$ donc $F'(x) = -9 \times \dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) + 3\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) + 3x \times \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) = x\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) = f(x)$

F est une primitive de f

31.	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$		
a.	0.	***b.***	$-\infty$
c.	$+\infty$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *d.*

Si $x = 3\pi + 6n\pi$ alors $f(x) = (3\pi + 6n\pi)\cos(\pi + 2k\pi) = -(3\pi + 6n\pi)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = -\infty$

Si $x = 6\pi + 6n\pi$ alors $f(x) = (6\pi + 6n\pi)\cos(2\pi + 2k\pi) = 6\pi + 6n\pi$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$

Il existe donc deux suites de nombres tells que pour l'une $f(x)$ a pour limite $-\infty$ et pour l'autre $+\infty$ donc f n'admet pas de limite en $+\infty$.

32.	$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$		
a.	0	***b.***	$-\infty$
c.	$+\infty$	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *a.*

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{3x}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{1}{3x}\right) = \cos 0 = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

33.	$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :		
a.	nulle	***b.***	strictement négative
c.	strictement positive	***d.***	aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

CORRECTION

Réponse *a.*

Une primitive de f est $F(x) = 9\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + 3x\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

$F(\pi) = 9\cos\dfrac{\pi}{3} + 3\pi\sin\dfrac{\pi}{3}$

$F(-\pi) = 9\cos\dfrac{-\pi}{3} - 3\pi\sin\dfrac{-\pi}{3}$ or $\cos\dfrac{-\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3}$ et $\sin\dfrac{-\pi}{3} = -\sin\dfrac{\pi}{3}$

$F(-\pi) = 9\cos\dfrac{\pi}{3} + 3\pi\sin\dfrac{\pi}{3}$ donc $F(-\pi) = F(\pi)$ donc $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$